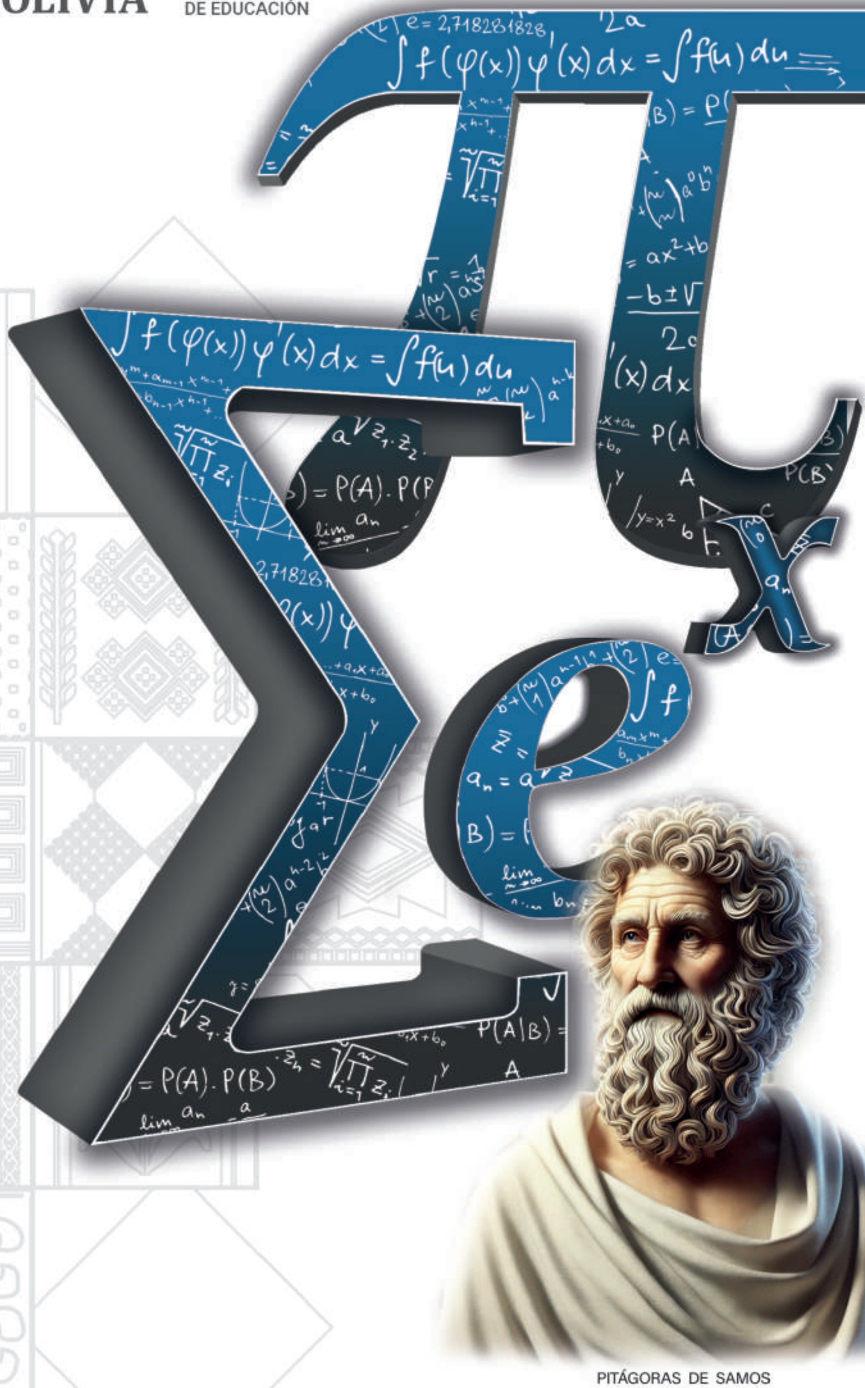
BICENTENARIO DE BOLIVIA

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

SOLUCIONARIO MATEMÁTICA

EDUCACIÓN SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA



PITÁGORAS DE SAMOS
569 A.C. - 475 A.C.

TOMO II

"2025 BICENTENARIO DE BOLIVIA"

SOLUCIONARIO

MATEMÁTICA

EDUCACIÓN SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA

TOMO II

"2025 BICENTENARIO DE BOLIVIA"

Solucionario de Matemática
Educación Secundaria Comunitaria Productiva

Omar Veliz Ramos
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Manuel Eudal Tejerina del Castillo
VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN REGULAR

Delia Yucra Rodas
DIRECTORA GENERAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Equipo de redacción
Dirección General de Educación Secundaria

Revisión
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

Cómo citar este documento:
Ministerio de Educación (2025). Subsistema de Educación Regular. “Solucionario de Matemática” Educación Secundaria Comunitaria Productiva. La Paz, Bolivia.

Depósito Legal
4-1-268-2024 P.O.

Impresión
Editorial del Estado Plurinacional de Bolivia


Luis Alberto Arce Catacora
PRESIDENTE DEL ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA

Índice general

Matemática

Presentación

La Constitución Política del Estado establece que la educación, es un derecho fundamental que tiene como objetivo formar integralmente a las personas y fortalecer su conciencia social crítica. En este contexto, la enseñanza de la Matemática juega un papel crucial al desarrollar el pensamiento lógico y las habilidades analíticas necesarias para enfrentar los desafíos del siglo XXI.

El **Solucionario de Matemática**, elaborado por el Ministerio de Educación del Estado Plurinacional de Bolivia, se convierte en una herramienta fundamental para la formación académica de los estudiantes de secundaria. Este recurso no solo refuerza los contenidos de Matemática, sino que también fomenta el razonamiento lógico, la creatividad y la resolución de problemas en contextos prácticos y desafiantes.

Dividido en dos tomos, el solucionario abarca desde conceptos básicos hasta los más avanzados, organizados de manera progresiva:

- En el **Tomo I**, se trabajan áreas fundamentales como Álgebra, Aritmética, Geometría, Trigonometría y Combinatoria, destacando aplicaciones prácticas en problemas reales.
- En el **Tomo II**, se profundiza en temas como Lógica, Conjuntos, Estadística, Cálculo y Razonamiento Lógico, proporcionando una preparación sólida para competencias académicas y desafíos universitarios.

Los ejercicios están clasificados en niveles de dificultad, desde básico hasta avanzado, incluyendo problemas tipo olimpiada que retan el pensamiento crítico y la creatividad. Además, cada tema incluye una clave de respuestas que facilita el aprendizaje autónomo, permitiendo que los estudiantes revisen sus errores y mejoren sus estrategias de resolución.

El momento histórico que vivimos exige una educación transformadora, y la Matemática, como herramienta para la construcción del conocimiento científico, es clave para el desarrollo del país. Este solucionario no solo responde a las demandas de los planes educativos nacionales, sino que también fortalece el potencial de nuestros estudiantes para enfrentar los retos de la industrialización y el crecimiento con justicia social.

Con este material, reafirmamos nuestro compromiso de garantizar una educación de calidad que promueva el pensamiento lógico, crítico y creativo, pilares para la formación de mujeres y hombres comprometidos con el Vivir Bien colectivo y el desarrollo integral del Estado Plurinacional de Bolivia.

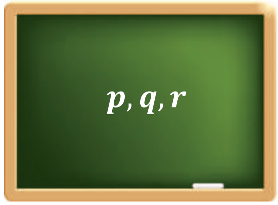
Luis Alberto Arce Catacora

Presidente Constitucional del Estado Plurinacional de Bolivia

LÓGICA Y CONJUNTOS

Lógica proposicional

Es el estudio sistemático de los principios de validación de argumentos y razonamientos. Se centra en establecer reglas y estructuras que permitan distinguir entre argumentos válidos e inválidos, así como entre afirmaciones verdaderas y falsas.
La lógica proposicional siendo parte de la lógica, se ocupa del estudio de proposiciones cuyos valores de verdad son verdaderos o falsos exclusivamente.



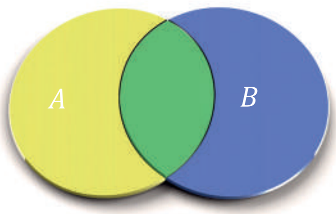
$$p \Rightarrow q$$

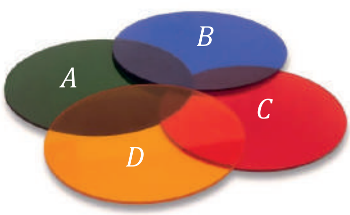
Álgebra de proposiciones

Las diferentes combinaciones entre proposiciones simples y compuestas, mediante operadores lógicos como la conjunción "y" ($\wedge$), disyunción "o" ($\vee$), negación "no" ($\sim$), implicación o condicional "si… entonces" y la bicondicional "si y solo sí" ($\Leftrightarrow$) y sus propiedades son objeto de estudio de esta área de la lógica.

Teoría intuitiva de conjuntos

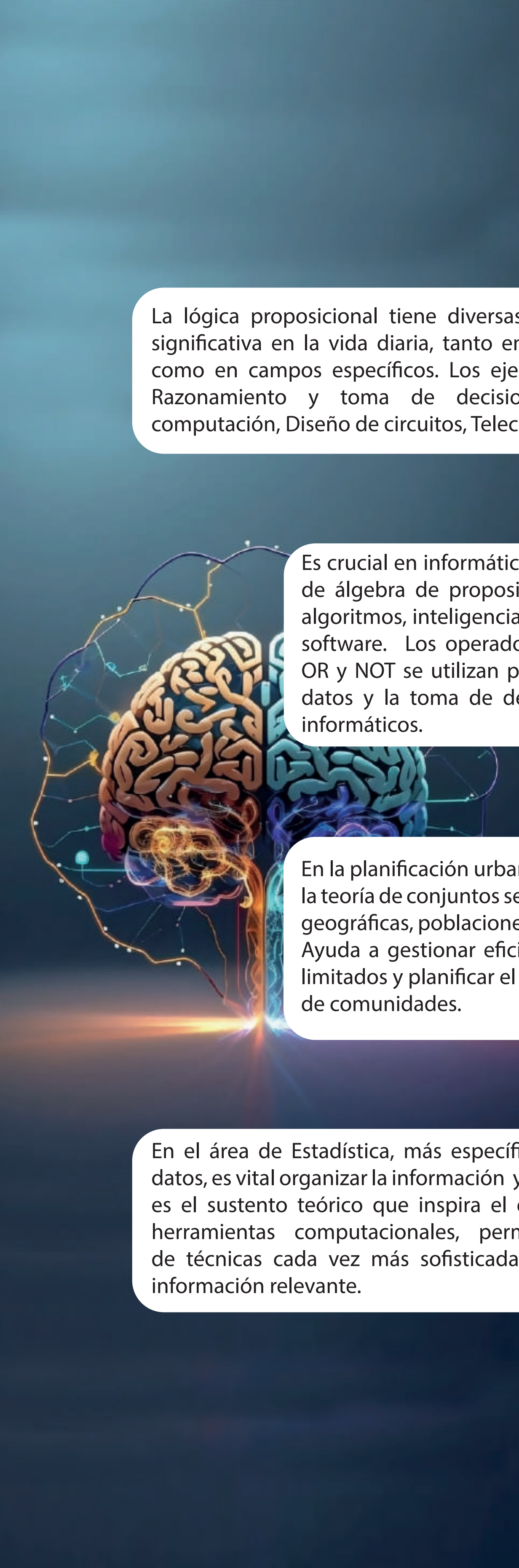
Es el estudio y la aceptación de la definición de un conjunto como una colección de objetos distintos que satisfacen una propiedad en común y enfocado en su visualización mediante diagramas de Venn.
Es fundamental para la mayoría de las áreas de las matemáticas, proporcionando una base para conceptos y estructuras matemáticas más complejas.





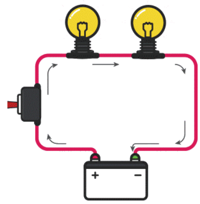
Álgebra de conjuntos

El estudio de las propiedades, operaciones (unión, intersecciones, diferencia, complemento, etc.) e interacciones(subconjunto) entre conjuntos, son el interés del álgebra de conjuntos.
Estas son de mucha utilidad al tratar el cálculo de cantidades de elementos para conjuntos finitos (cardinalidad).



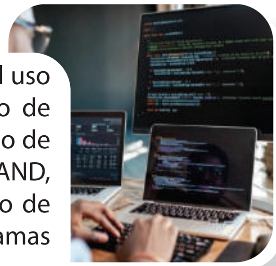
USOS Y APLICACIONES EN LA VIDA COTIDIANA

La lógica proposicional tiene diversas aplicaciones prácticas significativa en la vida diaria, tanto en situaciones cotidianas como en campos específicos. Los ejemplos son incontables: Razonamiento y toma de decisiones, Programación y computación, Diseño de circuitos, Telecomunicaciones, etc.



Fuente: Yandex

Es crucial en informática y programación el uso de álgebra de proposiciones en el diseño de algoritmos, inteligencia artificial y desarrollo de software. Los operadores lógicos como AND, OR y NOT se utilizan para controlar el flujo de datos y la toma de decisiones en programas informáticos.



Fuente: InterSoft

En la planificación urbana y gestión de recursos, la teoría de conjuntos se utiliza para definir áreas geográficas, poblaciones y recursos disponibles. Ayuda a gestionar eficientemente los recursos limitados y planificar el crecimiento y desarrollo de comunidades.

Fuente: Bolivia-INE

En el área de Estadística, más específicamente en ciencia de datos, es vital organizar la información y el álgebra de conjuntos es el sustento teórico que inspira el diseño de programas y herramientas computacionales, permitiendo el desarrollo de técnicas cada vez más sofisticadas en la extracción de información relevante.

Fuente: Yandex

Tablas de verdad

Proposiciones

1001. Armando anotó, en la siguiente lista, oraciones y frases de diversas fuentes. Se pide clasificarlas según sean proposiciones o no en una tabla, explicando los motivos para aquellas que no lo son.

- "El cielo es azul"
- "Hoy es lunes"
- ¿Cuál es tu nombre?
- "Por favor, cierra la puerta"
- "Abel es abogado"
- "El equipo de voleibol no llegó a ganar"
- ¡Qué hermoso día!
- Deberíamos salir esta noche…
- ¡La vida es bella!

Respuesta

Se procede a organizar la información, aclarando antes que a una proposición es posible asignarle solamente un valor de verdad:

Proposición	Enunciado no proposicional	Explicación
El cielo es azul Hoy es lunes		
	¿Cuál es tu nombre?	Es de tipo Interrogativo
	Por favor, cierra la puerta	Una petición
Abel es abogado El equipo de voleibol no llegó a ganar		
	¡Qué hermoso día!	Apreciación muy subjetiva
	Deberíamos salir esta noche…	Una petición.
	¡La vida es bella!	Apreciación muy subjetiva

1002. Lee y determina si las siguientes afirmaciones corresponden a proposiciones simples. Si es una proposición simple, indícala como tal, si no, explica por qué no lo es:

a) La capital de Bolivia es Sucre.
b) ¿Cuál es la capital de Santa Cruz?
c) $3 + 3 = 6$
d) Si llueve, entonces no iré al parque.
e) $x + 3 = 7$

Respuesta

a) **(La capital de Bolivia es Sucre)** es una proposición simple.
b) **¿Cuál es la capital de Santa Cruz?** es una pregunta, sin posibilidad de asignarle un valor de verdad.
c) **($3 + 3 = 6$)**, es una proposición simple verdadera o falsa.
d) **(Si llueve, entonces no iré al parque)**, no es una proposición simple, sino una del tipo "condicional", la cual trataremos más adelante.
e) **($x + 3 = 7$)**, no es una proposición, sino una expresión matemática con una variable la cual carece de la información suficiente como para asignarle un valor de verdad.

1003. Las siguientes oraciones figuran en la primera estrofa de una conocida canción:

- La semana acaba en domingo
- El día acaba en la tarde
- La tarde acaba en la noche
- La noche acaba en la madrugada
- En la madrugada acabo llorando
- Muriendo, muriendo de amor por ti…

Se pide asignar un valor de verdad Verdadero (V) o Falso (F), para aquellas que podrían considerarse proposiciones simples y para aquellas que no, detallar las razones.

Respuesta

- "La semana acaba en domingo" es una proposición simple a la cual es posible asignarle un valor de verdad (V).
- "El día acaba en la tarde" es una proposición simple a la cual es posible asignarle un valor de verdad (V).
- "La tarde acaba en la noche" es una proposición simple a la cual es posible asignarle un valor de verdad (V).

- "La noche acaba en la madrugada" es una proposición simple a la cual es posible asignarle un valor de verdad (V).
- "En la madrugada acabo llorando" no es una proposición, sino una expresión subjetiva.
- "Muriendo, muriendo de amor por ti…" no es una proposición, pues está cargada de mucha poesía.

Operadores lógicos

1004. La maestra de lenguaje pide a sus estudiantes formar una proposición compuesta a partir de las siguientes proposiciones simples:

p: La familia Torrez fundó el pueblo de Macondo.

r: Macondo vive tiempos de prosperidad.

Respuesta:

$\underbrace{\text{“La familia Torrez funda el pueblo de Macondo}}_{p}$

y $\underbrace{\text{este vive tiempos de prosperidad”}}_{r}$

Es decir: $p \wedge r$

1005. Nadia debe identificar proposiciones simples y compuestas en las siguientes oraciones y enunciados:

a) El cielo es azul.
b) El pasto es verde y el cielo es azul.
c) $2 + 2 = 4$

Respuesta:

a) Esta proposición es simple, pues sólo se le puede asignar un valor de verdad.
b) Esta proposición es compuesta, pues:
   p: El pasto es verde y q: el cielo es azul están unidas por el conectivo lógico "$\wedge$" (conjunción).
c) Esta proposición es simple, pues sólo se le puede asignar un valor de verdad.

1006. Sean las siguientes proposiciones:

"p: El fin de semana no se va a la escuela" y "q: Manuel debe estudiar"
Componer proposiciones con cada uno de los conectivos lógicos: negación, conjunción y disyunción.

Respuesta:
Se organiza la información en la siguiente tabla:

Proposición	Negación ($\sim$)	Conjunción($\wedge$)	Disyunción($\vee$)
p, q	$\sim p$: El fin de semana se va a la escuela $\sim q$: Manuel no debe estudiar	$p \wedge \sim q$: El fin de semana no se va a la escuela y Manuel no debe estudiar.	$p \vee q$: El fin de semana no se va a la escuela o Manuel debe estudiar.

Tablas de Verdad

1007. A partir de las siguientes proposiciones simples:

- s: Está lloviendo.
- t: Hace frío.

Hacer una tabla de verdad, evaluando la proposición compuesta: "Está lloviendo, pero no hace frío" elaborando una tabla de verdad.

Respuesta:

En símbolos lógicos, "Está lloviendo, pero no hace frío" se escribe $s \wedge \sim t$ y su tabla de verdad es:

s	t	$\sim t$	$s \wedge \sim t$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

1008. A partir de las siguientes proposiciones simples:

- s: Gerardo estudia.
- t: Gerardo no puede trabajar.

Evalúa la proposición compuesta: "Gerardo no estudia o no puede trabajar" elaborando una tabla de verdad.

Respuesta
Sea "~s: Gerardo no estudia", por tanto la tabla de verdad de $\sim s \vee t$

s	$\sim s$	t	$\sim s \vee t$
V	F	V	$\boldsymbol{V}$
V	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	V	V	$\boldsymbol{V}$
F	V	F	$\boldsymbol{V}$

Álgebra de Proposiciones

1009. Un loro repite alrededor de 10 veces la siguiente proposición:

– "Hace frío en invierno"

Encontrar en símbolos lógicos la proposición adecuada a lo que dijo el loro.

Resolución:

Simbolizamos la frase repetida por el loro:

l: "Hace frío en invierno"

Si el loro canta su frase dos veces, escucharemos:

"Hace frío en invierno" y "Hace frío en invierno"

o en símbolos lógicos: $l \wedge l$

Respuesta

$$l \wedge l \wedge l \wedge l \wedge l \wedge l \wedge l \wedge l \wedge l \wedge l$$

representa la frase del loro repetida 10 veces.

1010. Una señora en el mercado se siente indecisa sobre lo que cenará esta noche, enunciando la siguiente proposición:

– s: "Esta noche prepararé guisado o esta noche prepararé caldo..."

Expresar la proposición compuesta que simboliza al siguiente enunciado:

"Esta noche prepararé caldo o guisado…"

Resolución:

Se identifica a la proposición s como una compuesta:

u: "Esta noche prepararé guisado"

v: "Esta noche prepararé caldo"

de modo que: $s \equiv u \vee v$

Respuesta

$$s \equiv v \vee u$$

Dato Importante:
El símbolo "$\equiv$" indica "**equivalencia lógica**" entre dos proposiciones.

$p \equiv q$ se lee "p es lógicamente equivalente a q" o "p es equivalente a q".

1011. La señora al llegar a su casa del mercado finalmente toma una decisión:

– s: "Esta noche prepararé guisado o no cenaré o me dormiré".

Simbolizar a una proposición que sea equivalente a s en términos de "∨".

Resolución:

Se identifica a la proposición s como una compuesta:

– u: "Esta noche prepararé guisado"
– v: "No cenaré"
– w: "Me dormiré"

de modo que: $s \equiv u \vee v \vee w$

Respuesta
La proposición buscada es $s \equiv (u \vee v) \vee w$ (no es la única).

1012. La visitadora social entrevista a una familia del área rural. Al preguntarles sobre la cantidad de animales de granja que poseen, ellos responden:

– s: "Tenemos 10 ovejas, 5 gallinas y teníamos 2 patos"

Se pide construir una proposición que sea equivalente a s, en términos de "∧".

Resolución:

Se identifica a la proposición como una compuesta:

$$s \equiv (u \wedge v) \wedge w$$

donde: u: "tenemos 10 ovejas"; v: "tenemos 5 gallinas"; w: "teníamos 2 patos".

Respuesta:
Utilizando la asociatividad, con respecto a la conjunción:

$$s \equiv (u \wedge v) \wedge w$$

1013. A continuación, se tienen las siguientes proposiciones compuestas:

a) s_1: "Tenemos 10 ovejas, 5 gallinas o teníamos 2 patos"
b) s_2: "Tenemos 10 ovejas o 5 gallinas, pero no patos"

Expresar cada proposición en símbolos lógicos, utilizar propiedades para obtener proposiciones equivalentes y luego expresar sus equivalentes en lenguaje común.

Resolución:

Sean:

- p: tenemos 10 ovejas.
- q: tenemos 5 gallinas.
- r: teníamos 2 patos.

Fuente: yandex

La proposición s_1 en símbolos se escribe:

$$(p \wedge q) \vee r$$

La proposición s_2 en símbolos se escribe:

$$(p \vee q) \wedge \sim r$$

La proposición s_3 en símbolos se escribe:

$$\sim p \wedge \sim q$$

Respuesta

a) La proposición equivalente a s_1 es $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$; la cual, escrita en lenguaje usual es:
"Tenemos 10 ovejas y 5 gallinas o tenemos 10 ovejas y teníamos 2 patos".

b) La proposición equivalente a s_2 es $(p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)$; la cual, escrita en lenguaje usual es:
"Tenemos 10 ovejas y no teníamos patos o tenemos 5 gallinas y no teníamos patos"

1014. Verificar, vía tablas de verdad, las siguientes equivalencias lógicas, para cualesquiera proposiciones p, q:

a) **Complemento:** $p \wedge \sim p \equiv F$ y $p \vee \sim p \equiv V$

b) **Absorción:** $p \wedge F \equiv F$; $p \vee V \equiv V$

Respuesta: Para una sola proposición solo existen 2 posibles valores de verdad:

a)

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

b)

p	F	$p \wedge F$
V	F	F
F	F	F

p	V	$p \vee V$
V	V	V
F	V	V

1015. Verificar vía tablas de verdad las siguientes equivalencias lógicas, para cualesquiera p, q proposiciones:

a) **Absorción:** $p \vee (p \wedge q) \equiv p \equiv p \wedge (p \vee q)$
b) **Identidad:** $p \wedge V \equiv p \equiv p \vee F$

Respuesta: Para dos proposiciones solo existen 4 posibilidades:

a)

p	q	$p \vee (p \wedge q)$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	F	F

Como las columnas correspondientes a p, q, $p \vee (p \wedge q)$, $p \wedge (p \vee q)$ tienen los mismos valores de verdad, las tres son equivalentes.

b)

p	V	F	$p \wedge V$	$p \vee F$
V	V	F	V	V
F	V	F	F	F

Las columnas correspondientes a p, $p \wedge V$, $p \vee F$ tienen los mismos valores de verdad, por tanto las 3 son equivalentes.

1016. Recurriendo a una tabla de verdad, establezca la equivalencia de las siguientes proposiciones para cualesquiera p y q:

a) $\boldsymbol{p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q}$
b) $\boldsymbol{p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q}$

Respuesta:

a) Verificamos la equivalencia:

p	q	$\sim p$	$(\sim p \wedge q)$	$p \vee (\sim p \wedge q)$	$p \vee q$
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	F	**V**	**V**
F	V	V	V	**V**	**V**
F	F	V	F	**F**	**F**

Se observa que los valores de verdad de $p \vee (\sim p \wedge q)$ y $p \vee q$, coinciden en todos los casos, por tanto, son equivalentes.

b) Verificamos la equivalencia:

p	q	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$	$p \wedge (\sim p \vee q)$	$p \wedge q$
V	V	F	V	**V**	**V**
V	F	F	F	**F**	**F**
F	V	V	V	**F**	**F**
F	F	V	V	**F**	**F**

Se observa que los valores de verdad de $p \wedge (\sim p \vee q)$ y $p \wedge q$, coinciden en todos los casos, por tanto, son equivalentes.

Conjuntos por comprensión y por extensión

1017. Sean las siguientes colecciones de objetos:

- La colección de letras que forman la palabra “estudiar”,
- Los mejores partidos de fútbol
- Las personas mayores de 18 años.
- La escala DO, RE MI, FA, SOL, LA, SI
- Todos los hombres altos

¿Cuáles satisfacen la definición de conjunto?

Respuesta:

Recordemos que un conjunto es caracterizado como bien definido, si es posible decidir cuando un elemento pertenece o no al mismo:

Básico 01

Colección de objetos	Cumple pues...	No cumple pues...
La colección de letras que forman la palabra "estudiar".	La letra "a" forma parte de la palabra "estudiar".	
Los mejores partidos de fútbol		Los criterios para saber qué partido es mejor que otro no es claro.
Las personas mayores de 18 años.	El criterio de pertenencia "mayores de 18 años" es bastante claro.	
La escala musical de DO Mayor: DO, RE MI, FA, SOL, LA, SI		El orden es relevante en esta colección.
Todos los hombres altos.		El criterio de selección varía según el contexto.

1018. Juan observa su mano y decide escribir en su palma lo siguiente:

$$M = \{x / x \text{ es un dedo de la mano}\}$$

Describa los elementos de M por extensión.

Notación

Conjuntos:

$A, B, C, ..., Y, Z, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$, etc.
$C = \{$elementos separados por comas$\}$
$\in$: pertenece a…
$\notin$: no pertenece a…
$/$:…tal que…

Resolución:

Se conoce que cada uno de los dedos tienen los siguientes nombres:

pulgar, índice, mayor, anular, meñique

Para el primer dedo:
x: "pulgar" es un dedo de la mano, entonces $x \in M$.

Notemos que M está escrito por comprensión, donde la propiedad que lo define es:

$$P(x): x \text{ es un dedo de la mano.}$$

Luego escribimos M por extensión como sigue:
Para el segundo dedo:
x: "índice" es un dedo de la mano, entonces $x \in M$.
Para el tercer dedo:
x: "mayor" es un dedo de la mano, entonces $x \in M$.
Para el cuarto dedo:
x: "anular" es un dedo de la mano, entonces $x \in M$.
Para el quinto dedo:
x: "meñique" es un dedo de la mano, entonces $x \in M$.

Respuesta:
El conjunto M por extensión se escribe:

$$M = \{\text{pulgar}, \text{índice}, \text{mayor}, \text{anular}, \text{meñique}\}$$

1019. En su tarea de matemática, Elizabeth tiene los siguientes conjuntos por comprensión:

$$A = \{y/y \in \mathbb{Z}, y > 0, y^2 = y\}$$
$$B = \{m/m \in \mathbb{R}, m^2 = -1\}$$

de los cuales debe encontrar su forma por extensión.

Respuesta:

a) Para que un número entero z sea un elemento de A, debe verificar que:

$$z^2 = z$$

Resolviendo:

$$z^2 - z = z(z-1) = 0$$

Luego $z = 0$ o $z = 1$ y A escrito por extensión queda:

$$A = \{0, 1\}$$

b) Para cualquier número real x, se sabe que $x^2 \geq 0$. Así $B = \emptyset$; es decir, no tiene elementos:

Notación

Conjunto que no tiene elementos:
$\emptyset$: conjunto vacío
$\emptyset = \{\}$
$\mathbb{R}$: conjunto de los números reales

1020. Las calificaciones de Juan figuran en el siguiente conjunto escrito por comprensión:

$$N = \{x/x \in \mathbb{Z}, 55 \leq x \leq 86, x \text{ es múltiplo de } 12\}$$

el cual necesita ser expresado por extensión, para saber los resultados.

Básico 01

Conjunto de los números enteros:
$\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Resolución:

Sea el siguiente conjunto de los múltiplos enteros de 12:

$$A = \{\ldots, 12, 24, 48, 60, 72, 86, 98, \ldots\}$$

Los elementos x en A que satisfacen la condición de N: $55 \leq x \leq 86$ son: 60, 72 y 84.
Luego, escrito por extensión: $N = \{60,72,84\}$.

Respuesta:
Las calificaciones de Juan son 60, 72 y 84 puntos.

1021. Abel escribe en su cuaderno lo siguiente: los meses más largos son elementos del siguiente conjunto:

$M = \{x$ / x es un mes del año 2025 con 31 días$\}$
$B = \{x$ / x es un mes del año 2025 con 29 días$\}$.

Escribir M y B por extensión.

Resolución:

Los meses x que satisfacen la condición de M son: enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre.
En el año 2025, no existe mes alguno con 29 días.

Respuesta:
$M = \{$enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre, diciembre$\}$ y $B = \emptyset$.

1022. Considere los siguientes conjuntos:

a) $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ b) $I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

Escribir P, I por comprensión.

Respuesta:

a) El conjunto P está compuesto por números pares o equivalentemente por comprensión:
$P = \{x/x$ es un número par $\wedge$ $(0 < x < 15)\}$.
b) El conjunto P está compuesto por números impares o equivalentemente por comprensión:
P=$\{x/x$ es un número impar $\wedge$ $(0 < x < 15)\}$.

1023. Dado el universo de contexto $U = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y el siguiente conjunto: $P = \{2^m - 1/m \in U\}$
¿Son todos los elementos de P números primos?

Resolución:
Se busca expresar el conjunto P por extensión:

- Para $m = 2$: $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
- Para $m = 3$: $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$
- Para $m = 4$: $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$
- Para $m = 5$: $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$
- Para $m = 6$: $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$

Luego $P = \{3,7,15,31,63\}$.

Respuesta:
Los números 15 y 63 no son primos.

1024. Sea $U = \mathbb{Z}$ y el conjunto $R = \{1,-1\}$. Encontrar una expresión por comprensión de R.

Resolución:

En $\mathbb{Z}$ tenemos la siguiente propiedad:
Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$ (contemplando incluso la posibilidad de que tanto a como b sean cero al mismo tiempo).
Luego $(x - 1)\cdot(x + 1) = 0$ en $\mathbb{Z}$ implica que $x = 1$ o $x = -1$.

Respuesta:
El conjunto escrito por comprensión es:

$$R = \{x/x \in \mathbb{Z}, (x - 1) \cdot (x + 1) = 0\}$$

Relaciones entre conjuntos

1025. Al hacer compras, Andrea recibe de cambio monedas de 10, 20 y 50 centavos, ¿cuáles son los subconjuntos que puede formar con montos mayores a 50 centavos?

Notación

A **subconjunto de** B

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x/x \in A \Rightarrow x \in B$

Resolución:
Se procede a coleccionar en un conjunto las monedas:
$C = \{10 \text{ centavos}, 20 \text{ centavos}, 50 \text{ centavos}\}$

Respuesta: Construimos subconjuntos de C cuyo monto total sumado es mayor estricto a 50 centavos:

$A = \{50 \text{ centavos}, 10 \text{ centavos}\}$
$B = \{50 \text{ centavos}, 20 \text{ centavos}\}$
$C = \{50 \text{ centavos}, 10 \text{ centavos}, 20 \text{ centavos}\} = C$

En lenguaje de conjuntos podemos escribir $A \subset C$, $B \subset C$ y $C \subset C$.

1026. Considere el siguiente conjunto formado por los colores de la bandera de Bolivia:

$$BOL = \{\text{rojo, amarillo, verde}\}$$

¿para qué departamentos, sus respectivas banderas, contienen el color verde?

Resolución:

Se escriben los colores de las banderas de los 9 departamentos de Bolivia, utilizando notación de conjuntos:

- Beni: $BN = \{\text{verde}\}$
- Chuquisaca: $CH = \{\text{rojo, blanco, amarillo}\}$
- Cochabamba: $CB = \{\text{celeste}\}$
- La Paz: $LP = \{\text{rojo, verde}\}$
- Oruro: $OR = \{\text{rojo}\}$
- Pando: $PA = \{\text{verde, blanco}\}$
- Potosí: $PT = \{\text{rojo, blanco}\}$
- Santa Cruz: $SC = \{\text{blanco, verde}\}$
- Tarija: $TJ = \{\text{rojo, blanco}\}$

Fuente: yandex

Respuesta:
Los subconjuntos de BOL que cumplen la condición son BN, LP, PA y SC(las banderas de Beni, La Paz, Pando y Santa Cruz respectivamente).

1027. Dados los conjuntos del ejercicio anterior, establezca la relación de "contenido en…(⊂)" para:

a) BN y OR
b) TJ y CH
c) BN, LP y BOL.

Respuestas

a) De los datos, se observa que tanto BN como OR no tienen elementos en común, por tanto:

$$BN \neq OR;$$

(sin embargo $BN \subset BOL$ y $OR \subset BOL$).

b) $TJ \subset CH$

c) $BN \subset LP \subset BOL$

Datos

$BN = \{\text{“verde”}\}$
$CH = \{\text{“rojo”, “blanco”, “amarillo”}\}$
$LP = \{\text{“rojo”, “verde”}\}$
Oruro: $OR = \{\text{“rojo”}\}$
Tarija: $TJ = \{\text{“rojo”, “blanco”}\}$
$BOL = \{\text{“rojo”, “amarillo”, “verde”}\}$

1028. Se pide identificar al conjunto universo (universo de discurso) y el complemento de los siguientes conjuntos, utilizando diagramas de Venn:

a) Sea $M = \{2,4,6,8,1,3,5,7,9\}$ y $P=\{m/m \in M$ y m es primo$\} \subset M$.

b) $L = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, ñ, p, q, r, s, t, w, x, y, z\}$.

Resolución:

a) Se identifica a $M = U$, el como el "universo de discurso".

Se escribe el conjunto P por extensión:

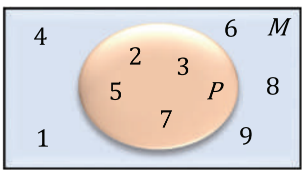
$$P = \{2, 3, 5, 7\}$$

El complemento $\bar{P}$ de P es la colección de elementos de M, que no son parte de P:

$$\bar{P} = \{1,4,6,8,9\} \subset M$$

Respuesta:

Se procede a visualizar la información, utilizando un diagrama de Venn:



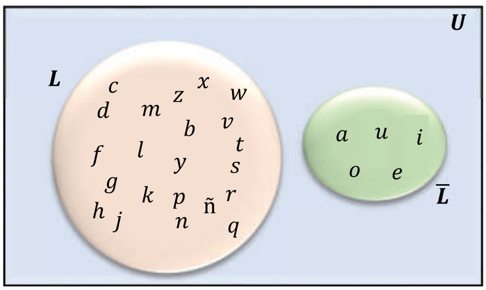
b) Se identifica al alfabeto como U, el "universo de discurso".

El complemento $\bar{L}$ de L es el conjunto de las 5 vocales del alfabeto:

$$\bar{L} = \{a, e, i, o, u\} \subset U$$

Respuesta:

Utilizando un diagrama de Venn, tenemos:



1029. Sea $N = \{\text{DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI}\}$ el conjunto de notas musicales. Denominamos "triada" a los subconjuntos de N compuestos por 3 notas musicales. Se pide encontrar los complementos de las siguientes triadas:

$$C = \{\text{SOL, MI, DO}\}, F = \{\text{FA, LA, DO}\}, S = \{\text{SOL, SI, RE}\}, L = \{\text{LA, DO, MI}\}$$

Respuesta: Sea U el universo de contexto. Luego los complementos son:

a) $\bar{C} = \{\text{RE, FA, LA, SI}\}$

b) $\bar{F} = \{\text{RE, MI, SOL, SI}\}$

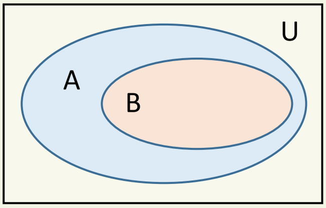
c) $\bar{S} = \{\text{DO, MI, FA, LA}\}$

d) $\bar{L} = \{\text{SI, RE, FA, SOL}\}$

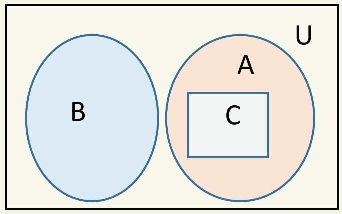
Básico 01

1030. En la pizarra del aula, la maestra dejó dibujado los siguientes diagramas de Venn:

a)



b)



Para la vuelta del recreo, los estudiantes deben escribir en términos de inclusión de conjuntos y complementos, las afirmaciones de los diagramas de Venn.

Respuestas

a) $B \subset A$ y $\bar{A} \subset \bar{B}$. b) $C \subset A,\ C \subset \bar{B}, A \subset \bar{B}$.

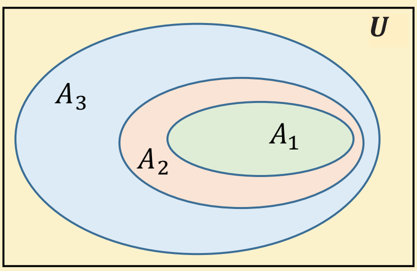
1031. Sean U el conjunto universo y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos definidos en U. Se pide dibujar un diagrama de Venn para el siguiente conjunto:

$$B_n = A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset, \ldots, A_{n-1} \subset A_n$$

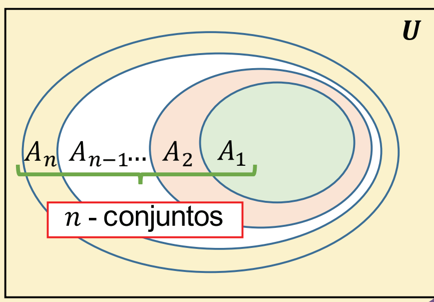
con n un número natural cualquiera.

Respuesta:

Dibujamos un caso concreto; es decir, para $n = 3$ tenemos:



Luego se procede con el caso general:



1032. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ intervalos abiertos con $n \in \mathbb{N}$, ¿qué se puede decir sobre estos conjuntos, respecto a la inclusión?

Resolución:

Como $n \in \mathbb{N}$, para $n = 1$: $A_1 = (0,1)$

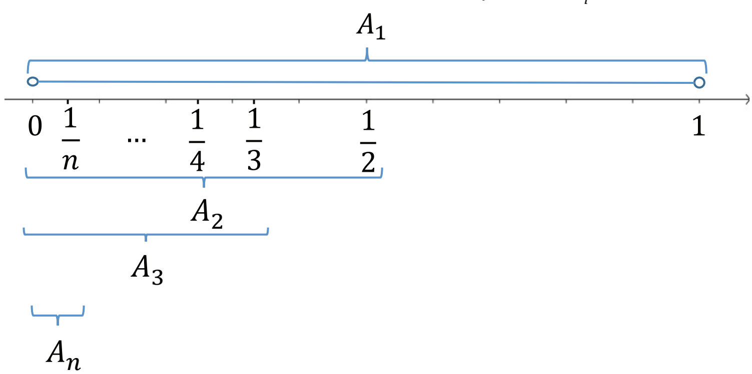
Para $n = 2$:

$$A_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Como $\frac{1}{2} < 1$, entonces $A_2 \subset A_1$.

Para $n = 3$:

Graficando el intervalo real (0,1) con los subconjuntos A_i:



Respuesta:

En general, ocurre que para cualquier número natural m se cumplen las siguientes inclusiones:

$$A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1$$

Operaciones entre conjuntos

1033. Encuentre la intersección de los siguientes subconjuntos dado U el conjunto de los primeros 20 números naturales:

$$A = \{y/y \text{ es par} \wedge 0 \leq y \leq 15\}$$

$$B = \{z/z \text{ es múltiplo de } 3\}.$$

Respuesta:

Es conveniente escribir los conjuntos A y B por extensión:

$A = \{2,4,6,8,10,12,14\}$ y

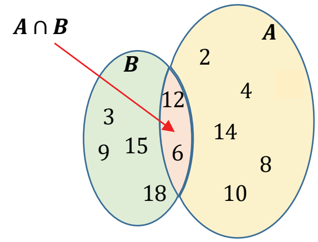
$B = \{3,6,9,12,15,18\}$.

Se buscan los elementos que aparecen tanto en A como en B y los coleccionamos en un nuevo conjunto:

$$A \cap B = \{6,12\}$$

Intersección de conjuntos

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$



1034. Del conjunto formado por los colores de la bandera de Bolivia:

$$BOL = \{\text{rojo, amarillo, verde}\}$$

¿Para qué departamentos, los colores de sus respectivas banderas, contienen el color rojo en común?

Resolución:

Se encontró los conjuntos correspondientes a las banderas de los 9 departamentos:

- Beni: $BN = \{\text{verde}\}$
- Chuquisaca: $CH = \{\text{rojo, blanco, amarillo}\}$
- Cochabamba: $CB = \{\text{celeste}\}$
- La Paz: $LP = \{\text{rojo, verde}\}$
- Oruro: $OR = \{\text{rojo}\}$
- Pando: $PA = \{\text{verde, blanco}\}$
- Potosí: $PT = \{\text{rojo, blanco}\}$
- Santa Cruz: $SC = \{\text{blanco, verde}\}$
- Tarija: $TJ = \{\text{rojo, blanco}\}$

Respuesta:
El color rojo está presente en las banderas de Chuquisaca, La Paz, Oruro, Potosí y Tarija, luego se puede escribir:

$$CH \cap LP \cap O \cap PT \cap T = \{\text{rojo}\}$$

1035. Encontrar la unión de los siguientes subconjuntos, dado U el conjunto de los primeros 20 números naturales:

A $= \{(y \in U)$ / y es primo$\}$

B $= \{(z \in U)$ / z es par$\}$.

Respuesta:

Es conveniente escribir los conjuntos A y B por extensión:

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

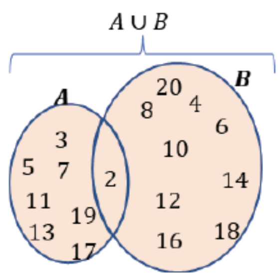
$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$.

Escribimos la unión de A y B "juntando" en un nuevo conjunto, todos sus elementos, evitando la repetición:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$

Diferencia de conjuntos

$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$



1036. En su clase de música, Ana ordena las notas musicales:

NOTA	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI
GRADO	1	2	3	4	5	6	7

para añadir séptimas a las siguientes triadas:

- $C=$ {SOL, MI, DO},
- $F=$ {FA, LA, DO},
- $S=$ {SOL, SI, RE},
- $L=$ {LA, DO, MI}

(Se denomina "séptima de x" a la nota ubicada un grado antes respecto a la nota x. Por ejemplo la séptima de DO es SI y la séptima de FA es MI).

Resolución:

La triada C contiene a las notas SOL, MI y DO, entonces procedemos a encontrar las séptimas respectivas de SOL, MI y DO y las coleccionamos en un nuevo conjunto: $C_7=$ {FA, RE, SI}

Luego se calcula $C \cup C_7=$ {SOL, MI, DO, FA, RE, SI}.

Respuesta: Los resultados que Ana obtiene son los siguientes:

- $C \cup C_7=$ {SOL, MI, DO, FA, RE, SI}.
- $F \cup F_7=$ {FA, LA, DO, MI, SOL, SI}.
- $S \cup L_7=$ {SOL, SI , RE, FA, LA, DO}.
- $L \cup L_7=$ {LA, DO, MI, SOL, SI, RE}.

1037. Dado U el conjunto de los primeros 20 números naturales como conjunto universo y los siguientes subconjuntos de U.

- $A=\{y \in U/y$ es un número de Fibonacci}
- $B=\{z \in U/z$ es compuesto}.

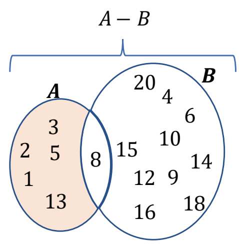
Se pide encontrar A - B, B - A y (A - B) $\cap$ B, ¿se cumple alguna relación de inclusión o igualdad?

Resolución:

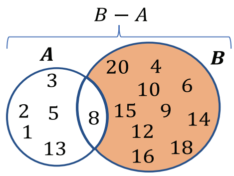
Escribimos los conjuntos A y B por extensión:
$A=\{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$ y
$B=\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$.
Se buscan los elementos que pertenecen a A y revisamos que no pertenezcan a B, luego construimos:

Unión de conjuntos

$A-B=\{x/x \in A \wedge x \notin B\}$



$B - A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$



$$A - B = \{4,6,9,10,12,14,15,16,18,20\}$$

Análogo:

$$B - A = \{1,2,3,5,13\}$$

Este último lo intersectamos con B:

$$(A - B) \cap B = \emptyset$$

Respuesta:

Se cumple que $(A - B) \cap B = \emptyset$.

1038. Sea U los estudiantes del sexto curso de una unidad educativa. En U, sea A el conjunto de estudiantes que participa en el Club de lectura y B el conjunto de estudiantes que participan en el Club de poesía, o descritos por extensión:

$A = \{$Ana, Carlos, Elena, Luis, María$\}$ y $B = \{$Carlos, Elena, Sofía, David$\}$

¿Qué estudiantes que participan en el Club de lectura, pero no en el Club de poesía?

Resolución:

Se pide hallar A - B, para ello consideramos los elementos de A:

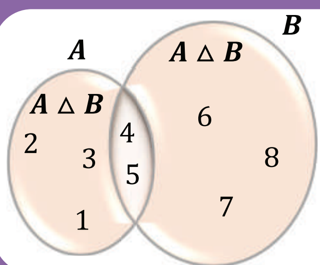
- Tanto Ana, Luis y María pertenecen a A, pero no pertenecen a B.
- Carlos está en A y en B (no será tomado en cuenta).
- Elena pertenece a A y también a B (tampoco se la tomará en cuenta).

Respuesta:

Los estudiantes que solo participan en el Club de lectura son Ana, Luis y María.

1039. Sean los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{4,5,6,7,8\}$. Encuentre la diferencia simétrica de A y B.

Respuesta:



Diferencia simétrica:

$A \triangle B = \{x/(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$

Se buscan los elementos de

A - B: $A - B = \{1, 2, 3\}$

B - A: $B - A = \{6, 7, 8\}$

Luego, para calcular la diferencia simétrica, se procede a unir ambos conjuntos:

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$

1040. Determinar los elementos de $A \triangle B$, sabiendo que $A = \{22, 25\}$ y $B = \{22, 23, 25\}$ donde el universo de discurso es $U = \{20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$.

Resolución:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

Al calcular A - B obtenemos el conjunto vació, pues $A \subset B$:

$$A - B = \emptyset$$

Se calcula B - A:

$$B - A = \{23\}$$

Respuesta:

$$A \triangle B = \{23\}$$

Álgebra de conjuntos

1041. Sean los conjuntos $A = \{y/y \in \mathbb{R}, y^2 = 4\}$ y $B = \{-2, 2\}$. Verificar que $A = B$.

Igualdad de conjuntos

Para mostrar que dos conjuntos A, B son iguales ($A = B$), es necesario y suficiente verificar que $A \subset B$ y $B \subset A$.

Resolución:

Se verifica que $A \subset B$, tomando un elemento de A, en este caso $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^2 = 4$.

Resolviendo la ecuación: $y^2 - 4 = 0$:

$$(y + 2)(y - 2) = 0$$

de modo que y = -2 o y = 2 verifican la ecuación. Por tanto $y \in B$ y por ende $A \subset B$.

Se cumple claramente que $B \subset A$:

$$(-2)^2 = 4 \ \text{ y } \ 2^2 = 4.$$

Así, mostramos que $A \subset B$ y $B \subset A$, es suficiente para concluir que $A = B$.

Respuesta

Queda verificada la igualdad de los conjuntos A y B

1042. ¿Son iguales los conjuntos $A = \{x/x \in Z \wedge -2 \leq x \leq 2\}$ y $B = \{x/x \in Z \wedge |x| \leq 2\}$?

Resolución:

Es conveniente escribir los conjuntos A y B por extensión:

$$A = \{-2, 1, 0, 1, 2\}$$

Para escribir B por extensión, probamos con los siguientes valores:

$x = -2$, $|-2| = 2 \leq 2$ es verdadero, luego $x = -2 \in B$.
$x = -1$, $|-1| = 1 \leq 2$ es verdadero, luego $x = -1 \in B$.
$x = 0$, $|0| = 0 \leq 2$ es verdadero, luego $x = 0 \in B$.
$x = 1$, $|1| = 1 \leq 2$ es verdadero, luego $x = 1 \in B$.
$x = 2$, $|2| = 2 \leq 2$ es verdadero, luego $x = 2 \in B$.
$x = 3$, $|3| = 3 \leq 2$ es falso, luego $x = 3 \notin B$.

Se hace notar que valores enteros mayores a 2 y menores a -2 no son elementos de B, luego:

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Respuesta:

A y B son iguales.

1043. Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ conjuntos definidos en $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ verifique que se cumpla $A \triangle B = B \triangle A$.

Propiedad conmutativa

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

Respuesta:

$A - B = \{2,4\}$ y $B - A = \{7,9\}$

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{2, 4, 7, 9\}$

$B \triangle A = (B - A) \cup (A - B) = \{2, 4, 7, 9\} = A \triangle B$

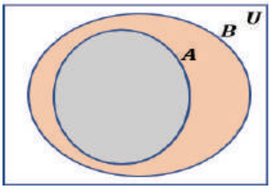
1044. Sabiendo que $A \subset B$, investigar a qué es igual el siguiente conjunto:

$$A \cup (A \cap B)$$

Idempotencia:
$A \cup A = A = A \cap A$
Propiedad distributiva:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Respuesta:

$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B)$
por propiedad distributiva,
$= A \cap (A \cup B)$



por Idempotencia de la unión,

$= A \cap B$

$= A$

pues $A \subset B$.

Cuando $A \subset B$: $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$

Respuesta

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

1045. Sabiendo que $A \subset B$, resolvemos el siguiente conjunto:

$$A \cap (A \cup B)$$

Resolución

$A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B)$
por propiedad distributiva,

$= A \cup (A \cap B)$

por Idempotencia de la unión,

$= A \cap A$

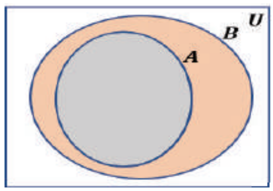
pues $A \subset B$,

$= A$

por idempotencia de la intersección.

Idempotencia:
$A \cup A = A = A \cap A$

Propiedad distributiva:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



Cuando $A \subset B$: $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$

Respuesta:

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

1046. Sean U el universo de discurso y $A \subset U$.
¿Qué ocurre con el conjunto A si hacemos la diferencia simétrica $A \triangle \emptyset$?

Resolución

De la propiedad de la diferencia simétrica:

$A \triangle \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A)$

tenemos que:

$A \triangle \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - B)$

$= (A \cap \overline{\emptyset}) \cup (\emptyset \cap \overline{B})$

por propiedad del complemento,

$= (A \cap U) \cup (\emptyset \cap \overline{B})$

pues $\overline{\emptyset} = U$

$= A \cup \emptyset = A$

por propiedad de la identidad.

Propiedad de la Identidad:

$A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = A$

Si A está definido en U:

$A \cap U = A$

Propiedad de complemento:

$$\overline{\overline{A}} = A, \overline{\emptyset} = U$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$
$$A \cup \overline{A} = U$$
$$A \cap \overline{B} = A - B$$

Propiedades de Identidad:

$A \cup \emptyset = A = A \cap \emptyset$

Propiedades de absorción:

$A \cup U = U$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

Respuesta

$$A \triangle \emptyset = A$$

1047. Investigar la relación que existe entre $\overline{A}$ y $\overline{B}$ sabiendo que $B \subset A$, donde A, B son parte de un universo U.

Respuesta

Dado que $B \subset A$, entonces $A = A \cup B$.
Tomando complementos; es decir:

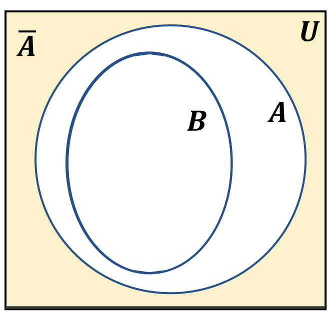
$$\overline{A} = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Luego $\overline{A} \subset \overline{B}$ (ver diagramas de Venn).

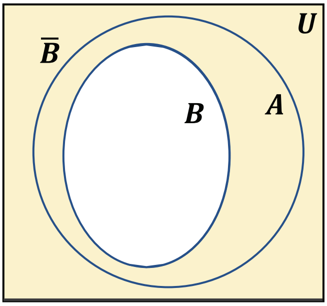
Propiedades de De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$\overline{A}$ es la parte sombreada del diagrama:



$\overline{B}$ es la parte sombreada del diagrama:



1048. Empleando igualdades de conjuntos, simplificar:

$$(A \cup B) \cup \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$$

para conjuntos A, B definidos en U.

Resolución

$$(A \cup B) \cup \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = (A \cup B) \cup [\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}]$$

por propiedad de De Morgan,

$$=(A \cup B) \cup (A \cup B)$$

por complemento del complemento,

$$=A \cup B$$

por Idempotencia para $(A \cup B)$.

Respuesta

$$(A \cup B) \cup \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = A \cup B$$

1049. Empleando igualdades de conjuntos, simplificar:

$$A \cup (A \cap B)$$

para conjuntos A, B definidos en U.

Resolución

$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B)$	(Identidad)
$= A \cap (U \cup B)$	(Propiedad distributiva)
$= A \cap U$	(por absorción en B)
$= A$	(por identidad)

Respuesta

$$A \cup (A \cap B) = A$$

1050. Empleando igualdades de conjuntos, simplificar:

$$A \cap (A \cup B)$$

para conjuntos A, B definidos en U.

Resolución

$A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B)$	(Identidad)
$= A \cup (\emptyset \cap B)$	(Propiedad distributiva)
$= A \cup \emptyset$	(por absorción en B)
$= A$	(por identidad)

Respuesta

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Tablas de verdad

1051. Simbolizar las siguientes proposiciones compuestas:
a) Si una ciudad está en Francia, entonces una ciudad está en Europa.
b) Si una ciudad está en América, entonces una ciudad no está en Europa.

Resolución

El conectivo lógico en ambos casos es la condicional o implicación el cual suele leerse "Si…, entonces…" ($\Rightarrow$).
Identificamos a las proposiciones simples que componen las proposiciones compuestas:

a) p: Una ciudad está en Francia.
q: Una ciudad está en Europa.
b) r: Una ciudad está en América.
$\sim q$: Una ciudad no está en Europa

Respuestas

a) $p \Rightarrow q$ b) $r \Rightarrow \sim q$

1052. Dadas las siguientes proposiciones simples:
p: "No voy a votar"
q: "Iré a votar en la tarde"
r: "Hoy está lloviendo torrencialmente desde las 14:00 pm"
¿Qué valores de verdad obtenemos cuando asignamos:
a) $p \equiv V, q \equiv V, r \equiv F$ b) $p \equiv V, q \equiv F, r \equiv V$
para $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow \sim r)$?

Resolución

Reemplazamos los valores de verdad en la proposición:
a) $(V \Rightarrow V) \vee (V \Rightarrow V) \equiv V \vee V \equiv V$
b) $(V \Rightarrow F) \vee (F \Rightarrow F) \equiv F \vee V \equiv V$

Respuestas

a) Verdadero b) Verdadero

1053. Una proposición simple o compuesta se denomina una "Tautología" si para cualquier combinación posible de valores de verdad den como resultado Verdadero, caso contrario se denomina "Contradicción" y para una compuesta, si las combinaciones de sus valores dan algunos Verdaderos y algunos Falsos, se le llama "Contingencia".
Mostrar proposiciones compuestas que sean Tautología, Contradicción y Contingencia.

Respuestas
- Tautología: Si Araceli sabe multiplicar, entonces Araceli sabe multiplicar
- Contradicción: Un animal es un pájaro y un animal no es un pájaro.
- Contingencia: Si $a^2 \geq 0$, entonces $a \geq 0$ (pues si $a = -5$, satisface $(-5)^2 = 25 > 0$ pero $a < 0$).

1054. Para las siguientes proposiciones simples:

p: Maya puede dormir

q: Maya es feliz

Escriba en lenguaje usual las siguientes proposiciones compuestas:

a) $p \Leftrightarrow q$

b) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

Respuestas

a) $p \Leftrightarrow q$: Maya puede dormir si y solo sí Maya es feliz.

b) $\sim p$: Maya no puede dormir.

$\sim q$: Maya no es feliz.

$\sim p \Leftrightarrow \sim q$: Maya no puede dormir si y solo sí ella no es feliz.

1055. Utilice tablas de verdad para verificar si las siguientes proposiciones compuestas son equivalentes, además, ¿son tautologías, contradicciones o contingencias?

a) $p \Rightarrow q$; $\sim p \vee q$

b) $p \Leftrightarrow q$; $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Resolución

A continuación, se muestran las tablas de verdad para ambas proposiciones compuestas:

a)

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	F	**V**	**V**
V	F	F	**F**	**F**
F	V	V	**V**	**V**
F	F	V	**V**	**V**

b)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
V	F	F	V	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
F	V	V	F	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
F	F	V	V	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$

Respuestas

a) Ambas son contingencias y son lógicamente equivalentes.

b) Ambas también son contingencias y también son lógicamente equivalentes.

1056. Elaborar una tabla de verdad para encontrar los valores de verdad de la siguiente proposición compuesta:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

¿Es una tautología?

Resolución

Se construye la tabla de verdad:

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
V	V	V	$\boldsymbol{V}$
V	F	V	$\boldsymbol{V}$
F	V	F	$\boldsymbol{V}$
F	F	V	$\boldsymbol{V}$

Respuesta

La columna sombreada de la tabla de verdad, muestra que $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ es una tautología.

1057. Construir una tabla de verdad para encontrar los valores de verdad de la siguiente proposición compuesta:

$$(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

¿Es una tautología?

Resolución

La tabla de verdad para $(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ es:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q$	$(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Respuesta $(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ es una tautología.

1058. Realizar una tabla de verdad y encontrar los valores de verdad de la siguiente proposición compuesta:

$$(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$$

¿Es una tautología, contradicción o contingencia?

Resolución

La tabla de verdad para $(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow \sim q) \wedge p$ es:

p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow \sim q$	$(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F

Respuesta
$(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$ es una contradicción.

Álgebra de proposiciones

1059. a) Establecer la equivalencia de la implicación en términos de disyunción: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$" con una tabla de verdad.
b) Simplificar la siguiente proposición compuesta:

$$[p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow \sim p$$

Resolución

a) Los valores de verdad posibles se ven a continuación:

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

b) Se utilizan las equivalencias lógicas para la conjunción, disyunción e implicación:

$[p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow \sim p \equiv (p \Rightarrow F) \Rightarrow \sim p$ pues $q \wedge \sim q \equiv F$

$\equiv (\sim p \vee F) \Rightarrow \sim p$ Equivalencia de la implicación

$\equiv \sim p \Rightarrow \sim p$ Identidad en disyunción

$\equiv V$ Tautología

Respuestas
a) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ vía tablas de verdad.
b) La forma simplificada es simplemente una tautología.

1060. Utilizando equivalencias lógicas, mostrar lo siguiente:

$$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Resolución

$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv$

$[(p \wedge q) \vee \sim p] \wedge [(p \wedge q) \vee \sim q]$ Distributividad

$\equiv [(p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p)] \wedge [(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim q)]$ Distributividad

$\equiv [V \wedge (q \vee \sim p)] \wedge [(p \vee \sim q) \wedge V]$ Tautología

$\equiv (q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ Identidad

$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$ Conmutatividad

$\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ Equivalencia "$\Rightarrow$"

Respuesta Queda verificado por equivalencias lógicas que:

$$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

1061. Simplificar las siguientes proposiciones:

a) $\sim[\sim p \vee \sim(\sim p \vee \sim q)]$

b) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

utilizando equivalencias lógicas.

Resolución

a) $\sim[\sim p \vee \sim (\sim p \vee \sim q)] \equiv \sim(\sim p) \wedge \sim[\sim(\sim p \vee \sim q)]$ Por Ley de De Morgan

$\equiv p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Negación de la negación

$\equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$ Distributividad

$\equiv F \vee (p \wedge \sim q)$ $(p \wedge \sim p)$ es contradicción de

$\equiv p \wedge \sim q$ Identidad

b) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$ Equivalencia de implicación

$\equiv \sim p \vee (q \wedge r)$ Distributividad

$\equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$ Equivalencia de implicación

Respuestas
a) $\sim[\sim p \vee \sim (\sim p \vee \sim q)] \equiv p \wedge \sim q$ b) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$

1062. Verificar las leyes de absorción sin utilizar tablas de verdad.

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

b) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Resolución

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q)$	Identidad disyunción
$\equiv p \vee (F \wedge q)$	Distributividad
$\equiv p \vee F$	Absorción
$\equiv p$	Identidad
b) $p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge V) \vee (p \wedge q)$	Identidad conjunción
$\equiv p \wedge (V \vee q)$	Distributividad
$\equiv p \vee V$	Absorción
$\equiv p$	Identidad

Respuestas

a) Con ello queda verificado que: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

b) Con ello queda verificado que: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

1063. La siguiente proposición

$$[p \wedge (q \wedge p)] \wedge [s \vee {\sim}s]$$

es equivalente a:

a) $p \vee q$

b) $p \wedge q$

c) $p \vee s$

Resolución

$[p \wedge (q \wedge p)] \wedge [s \vee {\sim}s] \equiv [p \wedge (q \wedge p)] \wedge V$	Tautología
$\equiv [p \wedge (q \wedge p)]$	Identidad
$\equiv [p \wedge (p \wedge q)]$	Conmutatividad
$\equiv [(p \wedge p) \wedge q]$	Asociatividad
$\equiv p \wedge q$	Idempotencia

Respuesta La opción correcta es *b)*.

1064. (**Ley del Modus Ponens**) Mostrar la siguiente equivalencia de proposiciones, sabiendo que $q \equiv V$:

$$[q \wedge (q \Rightarrow p)] \equiv p$$

Resolución

$[q \wedge (q \Rightarrow p)] \equiv [q \wedge (\sim q \vee p)]$	Equivalencia implicación
$\equiv (q \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$	Identidad
$\equiv F \vee (q \wedge p)$	Absorción
$\equiv q \wedge p$	Identidad
$\equiv V \wedge p$	pues $q \equiv$ V
$\equiv p$	Identidad

Respuesta Queda demostrada la equivalencia:

$$[q \wedge (q \Rightarrow p)] \equiv p$$

1065. (**Ley del Modus Tollens**) Mostrar la siguiente equivalencia de proposiciones:

$$[q \wedge (\sim p \Rightarrow q)] \equiv q$$

Resolución

$[q \wedge (\sim p \Rightarrow q)] \equiv [q \wedge (p \vee q)]$	Equivalencia implicación
$\equiv [q \wedge (q \vee p)]$	Identidad
$\equiv q$	Absorción

Respuesta: Queda demostrada la equivalencia:

$$[q \wedge (\sim p \Rightarrow q)] \equiv q$$

1066. Simplificar la siguiente proposición:

$$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$$

Resolución

$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (\sim q \vee p) \vee (\sim q \vee r)$	Equivalencia implicación
$\equiv \sim q \vee (p \vee \sim q) \vee r$	Asociatividad
$\equiv \sim q \vee (\sim q \vee p) \vee r$	Conmutatividad
$\equiv (\sim q \vee \sim q) \vee p \vee r$	Asociatividad
$\equiv (\sim q \vee p) \vee r$	Asociatividad
$\equiv (q \Rightarrow p) \vee r$	Equivalencia implicación

Respuesta

La proposición $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$ simplificada es equivalente a:

$$(q \Rightarrow p) \vee r$$

Conjuntos por comprensión y por extensión

1067. Sea el universo de discurso el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, escribir el siguiente conjunto por extensión:

$$C = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ es divisor de } 36\}$$

Resolución

La descomposición de 36, en factores primos es $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Luego obtenemos los divisores:

$$1, 2, 3, 6, 9, 12, 18, 36$$

Respuesta $C = \{1, 2, 3, 6, 9, 12, 18, 36\}$

1068. Describa por extensión el siguiente conjunto:

$$A = \{x / \ x \text{ es un mes del año 2025 y tiene más de 30 días}\}$$

Resolución

Los meses que tienen más de 30 días son enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre.

Respuesta

A = {enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre, diciembre}

1069. ¿Cuáles son los elementos del siguiente conjunto?

$$M = \{n / n \ \in \mathbb{N}; n \text{ es múltiplo de } 3, 1 < n \leq 37, n = 37\}$$

Resolución

Los múltiplos naturales de 3 son $3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$
Se hace notar que 37 no es un múltiplo de 3; sin embargo, es también un elemento de M.

Respuesta
$M = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 37, ...\}$

1070. ¿Qué subconjunto de los números reales R, contiene elementos que satisfacen la ecuación real $x^2 - 16 = 0$?. Describa tal subconjunto por comprensión y extensión.

Dato importante

En R, si $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$ para cualquier par números reales a y b.

Resolución

Resolviendo la ecuación:

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4) = 0$$

implica que

$$x_1 = 4 \vee x_2 = 2$$

En efecto:

$$x_1^2 - 16 = 4^2 - 16 = 0$$

y de la misma forma

$$x_2^2 - 16 = (-4)^2 - 16 = 0$$

Respuesta Sea S las raíces de la ecuación, entonces

$S = \{-4,4\}$ por extensión

$S = \{x/x \in \mathbb{R}, x^2 - 16 = 0\}$ por comprensión

1071. Encuentre por comprensión y extensión, el conjunto de los números naturales mayores estrictos que 3 y menores estrictos que 11 y que no sean un cuadrado perfecto.

Resolución

Los números que se buscan son 5, 6, 7, 8, 10. Observemos que $9 = 3^2$ y $4 = 2^2$ no serán tomados en cuenta.

Respuesta Sea P el conjunto buscado:

$P = \{5,6,7,8,10\}$ por extensión

$P = \{m/m \in \mathbb{N}, 3 < m < 11, \sqrt{m} \notin \mathbb{N}\}$ por comprensión

1072. Escribir el conjunto $S = \{8,- 8\}$ por comprensión, considerando a $\mathbb{R}$ como universo de discurso.

Resolución

Se propone la ecuación real $y^2 - 64 = 0$, cuyas soluciones reales son:

$y_1 = 8$ y $y_2 = - 8$.

Respuesta $S = \{y/y \in \mathbb{R}, y^2 - 64 = 0\}$

1073. Escribir el siguiente conjunto por comprensión:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9,...\}$$

considerando al universo de discurso el conjunto $\mathbb{N}$.

Resolución

Los elementos de A pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$1 = 2 \cdot \mathbf{1} - 1$$
$$3 = 2 \cdot \mathbf{2} - 1$$
$$5 = 2 \cdot \mathbf{3} - 1$$
$$7 = 2 \cdot \mathbf{4} - 1$$

Se hace notar que los elementos de A se escriben de la forma $2 \cdot k - 1$, donde $k \in \mathbb{N}$.

Respuesta $A = \{m/m \in \mathbb{N}, m = 2 \cdot k - 1; k \in \mathbb{N}\}$

1074. Escribir el siguiente conjunto por comprensión:

$$M_5 = \{5,10,15,20,...\}$$

considerando como universo de discurso el conjunto $\mathbb{N}$.

Resolución

Los elementos de M_5 pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$5 = 5 \cdot 1$$
$$10 = 5 \cdot 2$$
$$15 = 5 \cdot 3$$
$$20 = 5 \cdot 4$$

Se hace notar que los elementos de M_5 se escriben de la forma $5 \cdot k$ donde $k = 1, 2, 3,...$

Respuesta $M_5 = \{n/n \in \mathbb{N}, n = 5 \cdot k, k \in \mathbb{N}\}$

Relaciones entre conjuntos

1075. Sean $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ con $A = \{2,3,5,7\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ y $C = \{7,8,9\}$. Verificar si $A \subset B$ y $C \subset B$.

Dato importante

Escribimos $A \not\subset B$, cuando existe algún elemento de A que no pertenece a B.

Resolución

Para los elementos de A:
$2 \in B$, $3 \notin B$, $5 \notin B$ y $7 \notin B$.
Por tanto $A \not\subset B$.
Para los elementos de C:
$7 \notin B$, $8 \in B$, $9 \notin B$.
Por tanto $C \not\subset B$.

Respuesta No se verifica que $A \subset B$ o $C \subset B$.

1076. Dado U el conjunto universo de las letras del alfabeto,
$L = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$, $P = \{e, g, h\}$ y $C = \{x/x \in U \wedge x$ es una vocal$\}$.
Verificar si $P \subset L$ y $C \subset L$.

Resolución

Para los elementos de P:

$$e \in L, g \in L, h \in L$$

Por tanto $P \subset L$.
Escribimos C por extensión:

$$C = \{a, e, i, o, u\}$$

y notamos que

$$a \in L, e \in L, i \in L, o \notin L, u \notin L$$

Respuesta $P \subset L$ pero $C \not\subset L$.

1077. Dados $U = \mathbb{N}$ $L = \{n/n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 10\}$, $P = \{k \in \mathbb{N}/2 \cdot k\}$ e $I = \{s \in \mathbb{N} / 2 \cdot (s+1)\}$. Construir dos subconjuntos de L, uno que contenga elementos de P y el otro que contenga elementos de I.

Resolución

Escribimos L por extensión: $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Se observa que $2, 4, 6, 8, 10$ satisfacen la propiedad de pertenencia para P.
Los elementos de L o sea, $1, 3, 5, 7, 9$ satisfacen la condición de pertenencia para I.

Respuesta Los conjuntos buscados son:

$$S_1 = \{2, 4, 6, 8, 10\} \subset L \text{ y } S_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\} \subset L$$

1078. ¿Cumplen alguna relación los siguientes subconjuntos de Z?

$$A = \{s / s \in Z \wedge (s^2 + 2s + 1 = 0)\} \text{ y } B = \{t / t \in Z \wedge (-2 \leq t \leq 3)\}$$

Resolución

Escribimos ambos conjuntos por extensión:

$$A = \{-1\} \text{ y } B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

Se hace notar que -1, el cual pertenece a A, también pertenece a B.

Respuesta

Se cumple que $A \subset B$.

1079. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Encontrar los complementos de los siguientes subconjuntos:

$$A = \{1, 3, 5, 6\} \text{ y } B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Resolución

Para el conjunto A:

$$\bar{A} = \{n \in U / n \notin A\} = \{2,4,7,8,9,10\}$$

Para el conjunto B:

$$\bar{B} = \{m \in U / m \notin B\} = \{1,2,7,8,9,10\}.$$

Respuesta

$$\bar{A} = \{2,4,7,8,9,10\} \text{ y } \bar{B} = \{1,2,7,8,9,10\}.$$

1080. Sea $U = \{x/x$ es un día de la semana$\}$. Calcular los complementos de los siguientes subconjuntos de U:
F = {viernes, sábado, domingo} y L = {lunes martes, miércoles, jueves, viernes}.
¿Qué relación podemos concluir de $\bar{F}$ y $\bar{L}$?

Resolución

Escribimos U por extensión:

U ={lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

Escribimos los complementos respectivos de $\bar{F}$ y $\bar{L}$:

$\bar{F}$ = {lunes, martes, miércoles, jueves} y $\bar{L}$ = {sábado, domingo}.

Respuesta

$$\bar{F} \not\subset \bar{L} \wedge \bar{L} \not\subset V.$$

1081. Sea el universo de discurso el conjunto de los números naturales sin el cero. Encontrar los complementos de los siguientes subconjuntos:

a) $A = \{n/n$ es par$\}$
b) $B = \{m/m$ es múltiplo de $3\}$

¿Se cumple que $\bar{A} \subset \bar{B}$ o $\bar{B} \subset \bar{A}$?

Resolución

Los conjuntos A y B se escriben por extensión:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12,...\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,...\}$$

Calculando los complementos:

$$\bar{A} = \{1,3,5,7,9,11,13,15, ...\}$$

y para el conjunto B:

$$\bar{B} = \{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14, ...\}$$

Respuesta

No se cumple ninguna contención.

Intermedio 02

1082. Dado el conjunto universo $U = \mathbb{N}$, encontrar los subconjuntos de:
a) $\{0\}$ b) $\{1\}$ c) $\{0,1\}$.

Resolución

El problema se resuelve calculando los respectivos conjuntos potencia:

$$P(\{0\}), P(\{1\}), P(\{0,1\})$$

Respuestas

a) $P(\{0\}) = \{\emptyset,\{0\}\}$,
b) $P(\{1\}) = \{\emptyset,\{1\}\}$
c) $P(\{0,1\}) = \{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

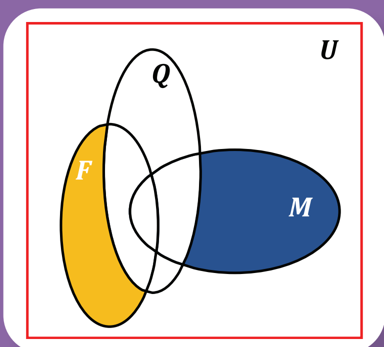
Operaciones entre conjuntos

1083. Carlos, Ana y Josefina conforman un grupo de estudio. Los tres tienen la tarea de resolver problemas de tres áreas: Matemática, Física y Química. Carlos resolverá problemas de Matemática o Física, pero no de Química. Ana de Matemática y Química, pero no de Física y Josefina de las tres áreas. Explique la información a través de diagramas de Venn.

Resolución

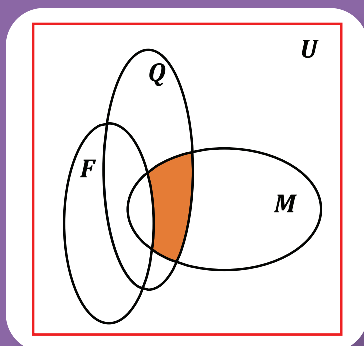
Sean los tres conjuntos de problemas M, F y Q de Matemática, Física y Química, respectivamente.

Respuestas



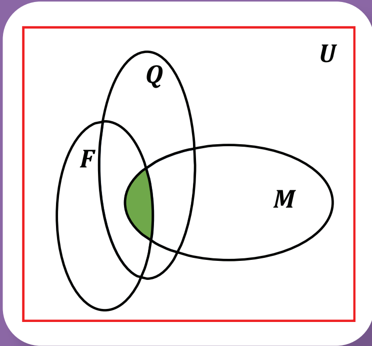
La parte sombreada corresponde a los problemas de Carlos, que se escribe:

$$(F \cup M) - Q$$



La parte sombreada corresponde a los problemas de Ana, que se escribe:

$$(Q \cap M) - F$$



La parte sombreada corresponde a los problemas de Josefina, que se escribe:

$$Q \cap F \cap M$$

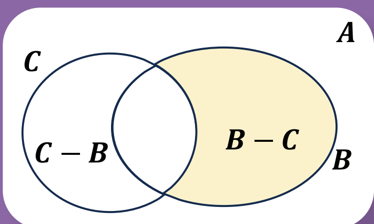
1084. En una clase de 30 estudiantes, 18 juegan al fútbol y 12 juegan al baloncesto. Elabore dos diagramas de Venn que reflejen a los estudiantes que sólo juegan fútbol y sólo juegan baloncesto.

Resolución

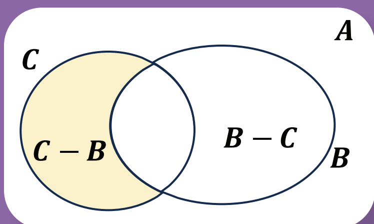
Sea A el conjunto de los 30 estudiantes en total. Llamemos B al conjunto de los 18 estudiantes que juegan fútbol y C al conjunto de 12 estudiantes que juegan baloncesto.

Respuestas

Estudiantes que **sólo** juegan fútbol:



Estudiantes que **sólo** juegan baloncesto.



1085. En una empresa, los empleados bilingües hablan español y quechua, español y aymara, guaraní y español. Muestre un diagrama de Venn para representar esta información

Resolución

Para el conjunto de idiomas I (el universo de discurso) que hablan los empleados, denotamos

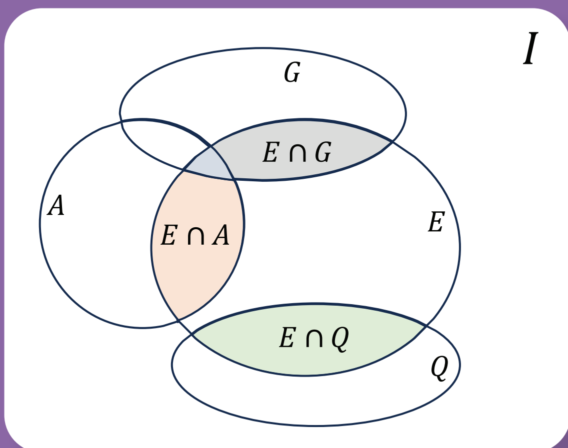
E: empleados que hablan español,
A: empleados que hablan aymara,
G: empleados que hablan guaraní.
Q: empleados que hablan quechua.

Los empleados bilingües se representan como:

$E \cap Q$: empleados que hablan español y quechua.
$E \cap A$: empleados que hablan español y aymara.
$G \cap E$: empleados que hablan guaraní y español.

Con esto podemos dibujar el diagrama de Venn:

Respuesta



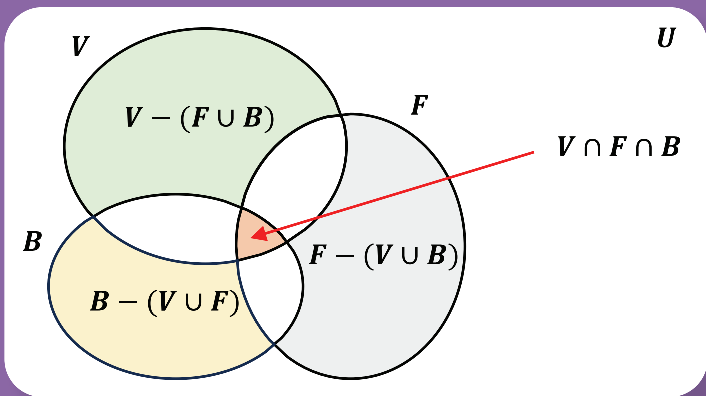
1086. En una encuesta sobre deportes, algunas personas dijeron que juegan fútbol, baloncesto y voleibol, algunas mencionaron que sólo juegan futbol, otras sólo baloncesto y otras sólo voleibol mientras que las demás mencionaron que juegan baloncesto o futbol. Mostrar la información a través de diagramas de Venn.

Resolución

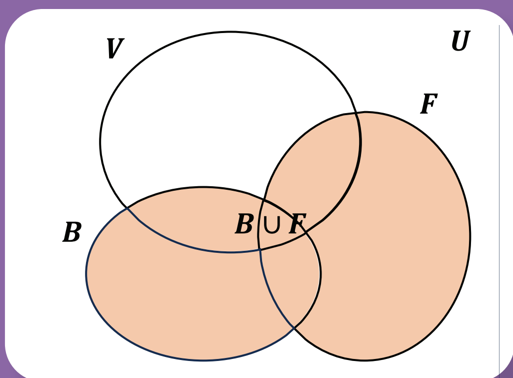
El conjunto universo la componen las personas encuestadas. Sean:
$B = \{x \mid x$ es una persona que juega baloncesto$\}$
$F = \{x \mid x$ es una persona que juega fútbol$\}$
$V = \{x \mid x$ es una persona que juega voleibol$\}$
Según la encuesta:
$B \cap F \cap V$: Personas que practican los tres deportes.
$F - (B \cup V)$: Personas que sólo practican futbol.
$B - (F \cup V)$: Personas que sólo practican baloncesto.
$V - (B \cup F)$: Personas que sólo practican voleibol.

Respuesta

$V \cap F \cap B$: personas que practican los tres deportes:

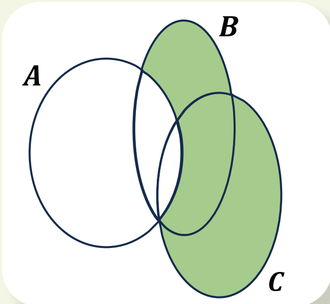


$B \cup F$: personas que practican baloncesto o fútbol.

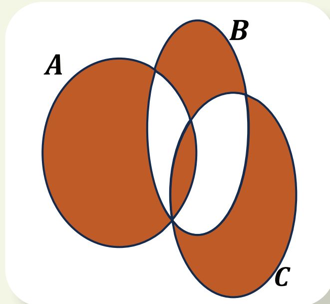


1087. Dados los siguientes diagramas de Venn, escribir la parte coloreada en términos de unión, intersección y diferencia de conjuntos.

a)



b)



Resolución

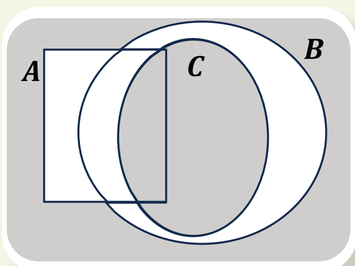
El diagrama de Venn a), tiene sin pintar al conjunto A y pintado a los conjuntos $B - A$ y $C - A$.
El diagrama de Venn b), tiene pintado a los conjuntos $C - B$, $A - B$ y $\{B - [(A - B) \cup (C - B)]\} \cup (A \cap B \cap C)$.

Respuesta

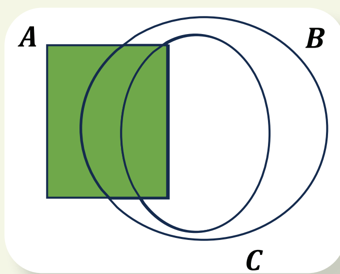
a) $(B - A) \cup (C - A)$
b) $(C - B) \cup (A - B) \cup \{B - [(A - B) \cup (C - B)]\} \cup (A \cap B \cap C)$

1088. Dados los siguientes diagramas de Venn, escribir la parte coloreada en términos de unión, intersección y diferencia de conjuntos.

a)



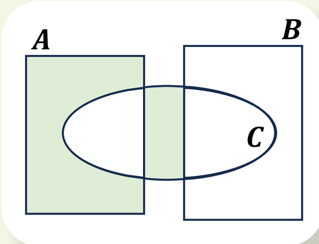
b)



Respuestas

a) $\overline{A \cup B} \cup C$ b) $A \cap B \cap C$

1089. Indicar el conjuntosque representa la parte coloreada en el diagrama de Venn.

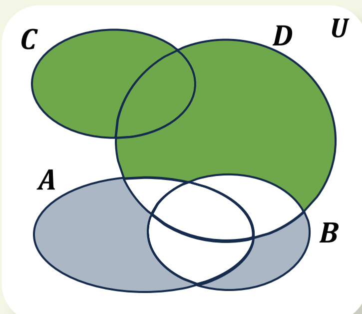


Resolución

La parte coloreada desde A, de izquierda a derecha, corresponde a A - C y la parte central a $C - (A \cup B)$.

Respuesta $(A - C) \cup [C - (A \cup B)]$.

1090. Dado el siguiente diagrama de Venn:



Identificar a los conjuntos que están coloreados de verde y azul.

Respuesta

$[A - (D \cup B)] \Delta (B - D)$ coloreado de celeste.

$C \cup [D - (A \cup B)]$ coloreado de verde.

Álgebra de conjuntos

1091. Utilizando propiedades sobre igualdad de conjuntos, probar las siguientes igualdades, con A y B definidos en un conjunto universo U:

a) $A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$

b) $A \cup (\bar{A} \cup B) = A \cup B$

Resolución

a)

$A \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)$

Propiedad Distributiva

$(A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B)$

Propiedad Absorción (Intersección)

$\emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$

Identidad en la unión.

b)

$A \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B)$

Propiedad Distributiva

$(A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = U \cap (A \cup B)$

Propiedad Absorción (Unión)

$U \cap (A \cup B) = A \cup B$

Identidad en la intersección

Respuesta Quedan demostradas las igualdades de los conjuntos.

1092. Con A, B definidos en un conjunto universo U y sabiendo que:

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

mostrar la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\bar{A} - \bar{B} = B - A$$

Resolución

$\bar{A} - \bar{B} = \bar{A} \cap \bar{\bar{B}}$

Por dato

$\bar{A} \cap \bar{\bar{B}} = \bar{A} \cap B$

Identidad para el complemento

$\bar{A} \cap B = B \cap \bar{A}$

Propiedad conmutativa

$B \cap \bar{A} = B - A$

Por dato.

Dato

$A - B = A \cap \bar{B}$

Respuesta Queda demostrada la igualdad de conjuntos.

1093. Utilizando la Ley de De Morgan simplificar:

$$\overline{(\bar{A} \cap B)} \cap \overline{(\bar{A} \cap C)}$$

Resolución

$$\overline{(\bar{A} \cap B)} \cap \overline{(\bar{A} \cap C)} = \overline{(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap C)}$$

Ley de De Morgan

$$\overline{(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap C)} = \overline{\bar{A} \cap (B \cup C)}$$

Propiedad distributiva

$$\overline{\bar{A} \cap (B \cup C)} = \bar{\bar{A}} \cup \overline{(B \cup C)}$$

Ley de De Morgan

$$\bar{\bar{A}} \cup \overline{(B \cup C)} = A \cup \overline{(B \cup C)}$$

Identidad del complemento

Respuesta El resultado es: $\overline{(\bar{A} \cap B)} \cup \overline{(\bar{A} \cap C)} = A \cup \overline{B \cap C}$

1094. Simplificar para A y B subconjuntos de U:

$$\overline{A \cup B} \cup [(\bar{A} \cap B) \cup \bar{B}]$$

Resolución

$$\overline{A \cup B} \cup [(\bar{A} \cap B) \cup \bar{B}] = \overline{A \cup B} \cup [(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (B \cup \bar{B})]$$

Propiedad distributiva

$$\overline{A \cup B} \cup [(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap U] = \overline{A \cup B} \cup (\bar{A} \cup \bar{B})$$

Identidad

$$\overline{A \cup B} \cup (\bar{A} \cup \bar{B}) = [\overline{A \cup B} \cup \bar{A}] \cup \bar{B}$$

Asociatividad

$$[\overline{A \cup B} \cup \bar{A}] \cup \bar{B} = [(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{A}] \cup \bar{B}$$

Propiedad de De Morgan

$$[(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{A}] \cup \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Propiedad de la Absorción

$$= \overline{A \cap B}$$

Respuesta El resultado es $\overline{A \cup B} \cup [(\bar{A} \cap B) \cup \bar{B}] = \overline{A \cap B}$

1095. Simplificar:

$$(A \cup B) - (\overline{B \cup A})$$

Resolución:

$$(A \cup B) - (\overline{B \cup A}) = (A \cup B) \cap \overline{(\overline{B \cup A})}$$

por propiedad de la diferencia

$$(A \cup B) \cap \overline{(\overline{B \cup A})} = (A \cup B) \cap (B \cup A)$$

por Idempotencia de complementos

$$(A \cup B) \cap (B \cup A) = A \cup B$$

por Identidad

Respuesta

$$(A \cup B) - (\overline{B \cup A}) = A \cup B$$

1096. En una clase de 30 estudiantes, 18 estudiantes practican fútbol y 12 juegan al baloncesto. Si 8 estudiantes practican ambos deportes, ¿cuántos estudiantes practican solo al fútbol?

Resolución

Sea U el conjunto de los 30 estudiantes.

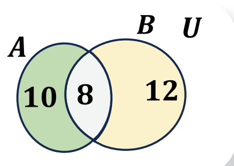
A: Estudiantes que practican fútbol, entonces $n(A) = 18$

B: Estudiantes que practican baloncesto, entonces $n(B) = 12$

$A \cap B$: Estudiantes que practican tanto fútbol como baloncesto, entonces $n(A \cap B) = 8$.

A - B: Estudiantes que practican sólo fútbol, luego:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 18 - 8 = 10$$



Respuesta Diez estudiantes practican sólo fútbol.

1097. Durante el inventario de una biblioteca, se cuentan 50 libros de ciencia ficción y 30 libros de misterio. Si 20 libros pertenecen a ambos géneros, ¿cuántos libros hay en total que pertenecen a ciencia ficción o misterio?

Dato importante

Cardinalidad de la unión de conjuntos finitos A y B.

$n(A \cup B) =$

$n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Resolución

A: Libros que pertenecen a ciencia ficción:

$$n(A) = 50$$

B: Libros que pertenecen a misterio:

$$n(B) = 30$$

$A \cap B$: Libros que pertenecen tanto a ciencia ficción y misterio:

$$n(A \cap B) = 20$$

$A \cup B$: Libros que pertenecen a ciencia ficción o misterio:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 50 + 30 - 20 = 60$$

Respuesta En total hay 60 libros que pertenecen a ciencia ficción o misterio.

1098. En una tienda, 60 clientes compraron ropa y 40 compraron zapatos. Si 25 clientes compraron ambos artículos, ¿cuántos compraron al menos uno de los dos artículos?

Resolución

Sean los conjuntos:
A: clientes que compraron ropa, n (A) = 60
B: clientes que compraron zapatos, n (B) = 40
$A \cap B$: clientes que compraron ambos artículos, n (A ∩ B) = 25.
$A \cup B$: clientes que compraron al menos uno de los dos artículos.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 60 + 40 - 25 = 75$$

Respuesta En total 75 clientes compraron al menos un artículo.

1099. En un grupo de amigos a 8 les gusta consumir quinua y a 5 les gusta consumir palmitos. Si a 3 de ellos le gusta consumir ambos, ¿a cuántos amigos les gusta sólo la quinua y sólo los palmitos?

Resolución

Sean:
A: amigos que les gusta consumir quinua, n (A) = 8.
B: amigos que les gusta consumir palmito, n (A) = 5.
$A \cap B$: ambas comidas, entonces n(A ∩ B) = 5.
A - B: amigos que sólo les consumir quinua:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=8-3=5$$

B - A: amigos que sólo les consumir palmitos:

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=5-3=2$$

Respuesta A 5 amigos les gusta sólo la quinua y a 2 sólo los palmitos.

1100. En una unidad educativa, 100 estudiantes toman clases de álgebra, 80 toman clases de cálculo y 50 toman ambas clases. Si la unidad educativa tiene un total de 200 estudiantes, ¿cuántos de ellos no toman ninguna de estas dos clases?

Resolución

Sean:
A: estudiantes que cursan álgebra, n (A) = 100
B: estudiantes que cursan cálculo, n (B) = 80.
$A \cap B$: estudiantes que cursan tanto álgebra como cálculo:

$$n\ (A \cap B) = 50$$

$A \cup B$: estudiantes que cursan al menos cursan una de las dos materias:
$\overline{A \cup B}$: $n\ (A \cup B) = (A) + n\ (B) - n\ (A \cap B) = 100 + 80 - 50 = 130$
estudiantes que no cursan ninguna de las dos materias, entonces

$$n(\overline{A\cup B})=200-130=70$$

Respuesta Son 70 estudiantes los que no están inscritos en álgebra ni cálculo.

Tablas de verdad

1101. Determinar los valores de verdad de la siguiente proposición:

$$\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$$

a) Con una tabla de verdad.
b) Sin tablas de verdad.

Respuestas

a) Se construye la tabla de verdad de la siguiente manera:

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$
V	V	F	V	$\boldsymbol{V}$
V	F	F	F	$\boldsymbol{F}$
F	V	V	V	$\boldsymbol{V}$
F	F	V	V	$\boldsymbol{V}$

b) En $\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$, el conectivo lógico que une tanto a $\sim(p \Rightarrow q)$ como a $\sim p$ es una implicación. El antecedente es $\sim(p \Rightarrow q)$ y la única forma de obtener un valor de verdad falso para $\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$ es que $\sim(p \Rightarrow q) \equiv V$ y $\sim p \equiv F$.

Esto último implica que $p \equiv V$. También sabemos que $(p \Rightarrow q) \equiv F$ con esto inferimos $q \equiv F$.

Por tanto $\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p \equiv F$ cuando $p \equiv V$ y $q \equiv F$, en todos los demás casos siempre es verdadero.

1102. Mediante tablas de verdad, determinar los valores de verdad y establecer si:

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \Rightarrow p$$

es una tautología, contradicción o contingencia.

Resolución:

La tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	$[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \Rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

Respuesta

Los valores de verdad cambian según los que toman p y q, luego $[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \Rightarrow p$ es una contingencia.

1103. Sea p una proposición. Verificar si existe alguna equivalencia con la proposición $(p \vee q) \Rightarrow q$ utilizando tablas de verdad.

Resolución:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow q$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

La columna que corresponde a los valores de p no coincide con la columna correspondientes a los valores de $(p \vee q) \Rightarrow q$.

Respuesta

Las proposiciones no son equivalentes.

1104. Determinar si la siguiente proposición:

$$[(p \Rightarrow \sim q) \wedge p] \vee (\sim p \wedge q)$$

es una tautología, utilizando tablas de verdad.

Resolución:

La tablas de verdad correspondiente a la proposición es:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \Rightarrow \sim q) \wedge p$	$\sim p \wedge q$	$[(p \Rightarrow \sim q) \wedge p] \vee (\sim p \wedge q)$
V	V	F	F	F	F	$\boldsymbol{F}$
V	F	F	V	V	F	$\boldsymbol{V}$
F	V	V	F	F	V	$\boldsymbol{V}$
F	F	V	V	F	F	$\boldsymbol{F}$

Respuesta

Los valores de verdad cambian según los que toman p y q, luego $[(p \Rightarrow \sim q) \wedge p] \vee (\sim p \wedge q)$ es una contingencia.

1105. Determinar el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$p \wedge \sim(\sim r \wedge s)$$

sabiendo que los valores de verdad de p, r, s son V, V y F respectivamente.

Datos

$p \equiv V$

$q \equiv V$

$r \equiv F$

Resolución

Reemplazando los datos en la proposición:

$$p \wedge \sim(\sim r \wedge s) \equiv V \wedge \sim(\sim V \wedge F)$$

$$p \wedge \sim(\sim r \wedge s) \equiv V \wedge \sim(F \wedge F)$$

$$p \wedge \sim(\sim r \wedge s) \equiv V \wedge \sim F$$

$$p \wedge \sim(\sim r \wedge s) \equiv V \wedge V$$

$$p \wedge \sim(\sim r \wedge s) \equiv V$$

Respuesta

La proposición en este caso particular es verdadera

1106. Sabiendo que $q \wedge p \equiv V$ y que $q \equiv V$, determinar el valor de verdad de:

a) $[(p \wedge q) \vee q] \Rightarrow \sim q$

b) $[(\sim p \vee \sim q) \wedge (r \Rightarrow q)] \vee q$

Resolución

La conjunción de dos proposiciones, solo admite el valor de verdad V cuando las que la componen son ambas V.

Ya que $q \wedge p \equiv V$ entonces $p \equiv V$.

a) Reemplazando $p \equiv V$ y $q \equiv V$, obtenemos:

$$[(p \wedge q) \vee q] \Rightarrow \sim q \equiv [(V \wedge V) \vee V] \Rightarrow F \equiv V \Rightarrow F \equiv F$$

b) $[(F \vee F) \wedge (r \Rightarrow V)] \vee V \equiv [(F \wedge (r \Rightarrow V)] \vee V$

$$\equiv (F \wedge V) \vee V \equiv F \vee V \equiv V$$

Respuestas

a) El resultado es falso.
b) El resultado es verdadero

1107. Mediante tablas de verdad, determinar los valores de verdad de la siguiente proposición y establecer si:

$$\sim p \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow s)$$

es una tautología, contradicción o contingencia.

Resolución

Se construye la tabla de verdad. Al tener 3 proposiciones, habrá $2^3 = 8$ combinaciones posibles de valores de verdad:

p	q	s	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim q \Leftrightarrow s)$	$\sim p \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow s)$
V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F

Respuestas

$\sim p \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow s)$ es una contingencia.

1108. El "contrarrecíproco: $\sim q \Rightarrow \sim p$" es una proposición lógicamente equivalente a $p \Rightarrow q$.

a) Utilizar tablas de verdad para verificar la equivalencia.

b) Para p: Él es honesto y q: Él es honorable, escribir el contrarrecíproco de $p \Rightarrow q$ en forma no simbólica.

Resolución

a) Se verifica la equivalencia mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	F	F	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
V	F	F	V	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
F	V	V	F	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
F	F	V	V	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$

Respuestas

a) La equivalencia queda verificada

b) El equivalente contrarrecíproco es "Si él no es honesto, entonces él no es honorable".

Álgebra de proposiciones

1109. Determinar el valor de verdad de

$$[(\sim p \wedge \sim q) \wedge (r \Rightarrow q)]$$

sabiendo que $\sim(r \Rightarrow p)$ es una tautología.

Resolución

Utilizamos la equivalencia de la implicación para obtener:

$$\sim(r \Rightarrow p) \equiv \sim(\sim r \vee p)$$

Luego, por la Ley de De Morgan:

$$\sim(r \Rightarrow p) \equiv r \wedge \sim p \equiv V$$

Al tener una conjunción, tanto $r \equiv V$ como $\sim p \equiv V$, luego:

$$[(\sim p \wedge \sim q) \wedge (r \Rightarrow q)] \equiv [(V \wedge \sim q) \wedge (V \Rightarrow q)] \equiv \sim q \wedge (V \Rightarrow q)$$

$$\equiv \sim q \wedge (F \vee q) \equiv \sim q \wedge q \equiv F$$

Respuesta

El resultado es Falso.

1110. Simplificar la siguiente proposición:

$$\sim[\sim((p \vee q) \wedge r)] \vee \sim q$$

Resolución

$$\begin{aligned}\sim[\sim((p \vee q) \wedge r)] \vee \sim q &\equiv [(p \vee q) \wedge r] \vee \sim q\\ &\equiv [(p \vee q) \vee \sim q] \wedge [r \vee \sim q]\\ &\equiv [p \vee (\sim q \vee q)] \wedge (r \vee \sim q)\\ &\equiv (p \vee V) \wedge (r \vee \sim q)\\ &\equiv V \wedge (r \vee \sim q)\\ &\equiv r \vee \sim q\\ &\equiv q \Rightarrow r\end{aligned}$$

Respuesta

$$\sim[\sim((p \vee q) \wedge r)] \vee \sim q \equiv q \Rightarrow r$$

1111. Aplicando equivalencias lógicas, simplificar la siguiente proposición:

$$[(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee r)$$

Resolución

$$\begin{aligned}\{[(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee r)\} &\equiv \{[(p \wedge q) \vee (q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee r)\}\\ &\equiv \{[q \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (p \vee r)\}\\ &\equiv \sim[q \wedge (p \vee r)] \vee (p \vee r)\\ &\equiv \sim q \vee \sim(p \vee r) \vee (p \vee r)\\ &\equiv \sim q \vee V\\ &\equiv V\end{aligned}$$

Respuesta

El resultado es:

$$\{[(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee r)\} \equiv V$$

1112. El valor de verdad de $p \vee q$ es falso. Con esto calcular el valor de verdad de:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r)$$

Resolución

Ya que $p \vee q \equiv F$, entonces $p \equiv F$ y $q \equiv F$ pues el conectivo que los une es una disyunción. Así:

$$\begin{aligned}
(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \equiv \\
&\equiv (F \wedge F \wedge r) \vee (V \wedge F \wedge \sim r) \vee (V \wedge F \wedge \sim r) \\
&\equiv [(F \wedge F) \wedge r)] \vee [(V \wedge F) \wedge \sim r] \vee [(V \wedge F) \wedge \sim r] \\
&\equiv (F \wedge r) \vee (F \wedge \sim r) \vee (F \wedge \sim r) \\
&\equiv F \vee F \vee F \equiv F
\end{aligned}$$

Respuesta

El resultado es falso.

1113. Muestre la equivalencia de las siguientes proposiciones:

$$[\sim(p \vee r) \Rightarrow \sim q] \wedge [(\sim p \wedge \sim r) \vee \sim q] \equiv \sim q$$

Resolución

$$\begin{aligned}
[\sim(p \vee r) \Rightarrow \sim q] \wedge [(\sim p \wedge \sim r) \vee \sim q] &\equiv [\sim(p \vee r) \Rightarrow \sim q] \wedge [\sim(p \vee r) \vee \sim q] \\
&\equiv [\sim(\sim(p \vee r)) \vee \sim q] \wedge [\sim(p \vee r) \vee \sim q] \\
&\equiv [(p \vee r) \vee \sim q] \wedge [\sim(p \vee r) \vee \sim q] \\
&\equiv [(p \vee r) \wedge \sim(p \vee r)] \vee \sim q \\
&\equiv F \vee \sim q \\
&\equiv \sim q
\end{aligned}$$

Respuesta

Queda demostrado que:
$[\sim(p \vee r) \Rightarrow \sim q] \wedge [(\sim p \wedge \sim r) \vee \sim q] \equiv \sim q$

1114. Encontrar una proposición x, tal que:

$$[(x \Rightarrow p) \wedge \sim x] \vee (q \wedge p) \equiv q$$

Resolución

Simplificando la proposición:

$$[(x \Rightarrow p) \wedge \sim x] \vee (q \wedge p) \equiv [(\sim x \vee p) \wedge \sim x] \vee (q \wedge p)$$

$$\equiv \sim x \vee (q \wedge p)$$

Por la condición del problema:

$$\sim x \vee (q \wedge p) \equiv q$$

Respuesta

La proposición buscada es $x \equiv \sim q$, pues esta satisface la propiedad de absorción: $\sim(\sim q) \vee (q \wedge p) \equiv q \vee (p \wedge q) \equiv q$.

1115. Establecer que las siguientes proposiciones:

$$[(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge (p \Rightarrow q) \equiv q$$

son equivalentes.

Resolución

$$[(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge (p \Rightarrow q) \equiv [p \vee (q \vee (\sim p \wedge q)] \wedge (p \Rightarrow q)$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$$

$$\equiv q \vee (p \wedge \sim p)$$

$$\equiv q \vee F$$

$$\equiv q$$

Respuesta

Las proposiciones son lógicamente equivalentes.

1116. ¿Se obtiene r al simplificar $(r \wedge \sim t) \vee (r \wedge t)$?

Resolución

Simplificando:

$$(r \wedge \sim t) \vee (r \wedge t) \equiv r \wedge (t \vee \sim t)$$

y como $(t \vee \sim t) \equiv V$:

$$(r \wedge \sim t) \vee (r \wedge t) \equiv r \wedge V \equiv r$$

Respuesta

Sí se obtiene r.

Conjuntos por comprensión y por extensión

1117. Según el conjunto:

$$B = \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$$

¿Cuáles de los enunciados son incorrectos o falsos?

a) $\{a\} \in B$ b) $\{b\} \notin B$ c) $a \in B$ d) $b \subset B$

Dato importante

Sea A un conjunto y $x \in A$, entonces $\{x\}$ se lee el **conjunto unitario** que tiene como único elemento a $x \in A$, donde $\{x\} \subset A$ ($\{x\}$ es un conjunto).

Resolución

Los siguientes enunciados son verdaderos:

- $\{a\} \in B$.
- $\{b\} \notin B$.
- $a \in B$

El siguiente enunciado es falso:

- $b \subset B$ (pues b es un elemento de A, no un conjunto).

Respuesta

El enunciado incorrecto o falso es d)

1118. Para el siguiente conjunto D = {viernes, sábado, domingo}, ¿cuántos subconjuntos es posible formar?

Dato importante

Para cualquier conjunto A:

$\emptyset \subset A$ y $A \subset A$

Resolución

Se procede a tomar los elementos de D y formar los siguientes subconjuntos unitarios:

{viernes}; {sábado}; {domingo}

También los de dos elementos, recordando que en conjuntos el orden de los elementos es irrelevante:

{viernes, sábado}; {viernes, domingo}; {sábado, domingo}

Hasta aquí tenemos 6 subconjuntos de D.

Respuesta

Incluidos D y $\emptyset$, tenemos un total de 8 subconjuntos de A.

1119. Si $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, encontrar todos los subconjuntos de A. Para tales subconjuntos, construya otro conjunto que los contenga como elementos y llámelo $P(A)$.

Dato importante

Sea A un conjunto, el conjunto de todos los subconjuntos de A se denota $P(A)$ y se lee **el conjunto potencia** de A **o el conjunto de partes** de A.

Resolución

Se busca los subconjuntos de A:

$$\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \emptyset, A$$

Respuesta

$P(A) = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \emptyset, A\}$.

1120. Definir por extensión el conjunto de letras en la palabra "ALAS", luego seleccionar de su conjunto potencia, aquellos subconjuntos que contengan:

a) Solo vocales

b) Solo consonantes

Resolución

El conjunto buscado es $W = \{\mathrm{A, L, S}\}$.

Calculamos su conjunto potencia:

$$P(W) = \{\{\mathrm{A}\}; \{\mathrm{L}\};\ \{\mathrm{S}\};\ \{\mathrm{L, S}\};\ \{\mathrm{A, S}\};\ \{\mathrm{A, L}\};\ \emptyset;\ W\}$$

Respuesta

a) Solo vocales: $\{A\} \in P(W)$

b) Solo consonantes: $\{S\}, \{L\}, \{S, L\} \in P(W)$

1121. Verificar si los siguientes conjuntos son iguales:

$A = \{2m + 5 \,/\, m \in \mathbb{N} \wedge (1 \leq m \leq 3)\}, B = \{1 + 2n \,/\, n \in \mathbb{N} \wedge (3 \leq n \leq 5)\}$

Resolución

Es conveniente expresar ambos conjuntos por extensión:

Los números naturales m que satisfacen la condición $1 \leq m \leq 3$ son $1,2,3$. Luego para $m = 1$, calculamos $2m + 5 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$

Para $m = 2$, $2m + 5 = 2 \cdot 2 + 5 = 9$.

Para $m = 3$, $2m + 5 = 2 \cdot 3 + 5 = 11$.

Así, $A = \{7,9,11\}$. De la misma forma obtenemos $B = \{7,9,11\}$

Respuesta

Así, $A = B$ pues $A = \{7,9,11\}$ y $B = \{7,9,11\}$

1122. Sea U el universo de discurso que consiste en las 28 letras del alfabeto. Para las siguientes afirmaciones sobre subconjuntos de U:

a) $b = \{b\}$ b) $\{a, b\} = \{\{a\}, \{b\}\}$ c) $e \in \{e\}$

¿Cuáles de ellas son verdaderas?

Resolución

a) Esta afirmación es falsa, pues B es un subconjunto de U, en cambio $\{B\}$ es un conjunto que contiene un solo elemento, en este caso a $B \subset U$.

b) Esta afirmación es falsa, pues $\{a, b\}$ es un subconjunto de U, cuyos elementos son a y b; mientras que los elementos de $\{\{a\}, \{b\}\}$ son $\{a\}$ y $\{b\}$ que son subconjuntos de U.

c) La afirmación es verdadera, pues $\{e\}$ tiene como elemento a $e \in$ U.

Respuesta

La única afirmación verdadera es c).

1123. Hallar la cantidad de elementos del conjunto A si está definido por comprensión:

$$A = \{y^2 + 2 / y \in \mathbb{Z} \wedge (-2 \leq y \leq 3)\}$$

Dato importante

La cantidad de elementos de un conjunto finito A se denomina **cardinal de A** y se denota por $\boldsymbol{n(A)}$.

Resolución

Es conveniente expresar A por extensión. Los números enteros y entre -2 y 3, son:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Evaluando cada uno de ellos en la expresión $y^2 + 2$, obtenemos:

$$6, 3, 2, 11$$

Así, $A = \{2, 3, 6, 11\}$

Respuesta

$$n(A) = 4.$$

1124. Si el conjunto $A = \{\sqrt[3]{x-2}, 2\}$ es unitario, ¿cuál es el único elemento de A?

Resolución

Como A es unitario, entonces necesariamente $\sqrt[3]{x-2} = 2$.

Luego despejando x:

$$x = 10$$

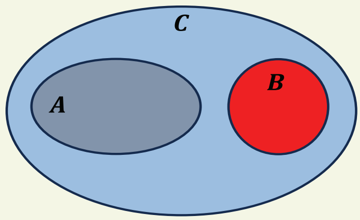
Así: $A = \left\{\sqrt[3]{10-2}, 2\right\} = \{2,2\} = \{2\}$.

Respuesta

El único elemento de A es 2.

Relaciones entre conjuntos

1125. A partir del diagrama de Venn, indique todas las inclusiones existentes entre A,B en C.



Respuestas

Del diagrama: $A \subset C$; $B \subset C$; $A \subset (C - B)$

$B \subset (C - A)$; $A \cap B = \emptyset \subset C$

$A \cup B \subset C$

1126. Dados los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$:

$A = \{n/n \in \mathbb{N}, n$ es un divisor de $12\}$

y $B = \{m/m \in \mathbb{N}, m$ es un divisor de $36\}$,

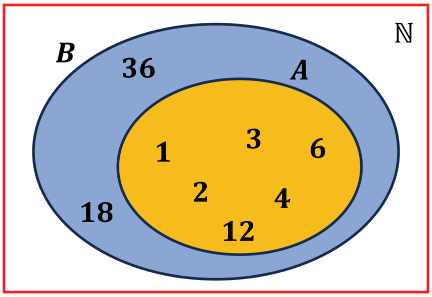
dibujar un diagrama de Venn para determinar si $A \subset B$ o $B \subset A$.

Resolución

Se escriben por extensión tanto A como B:

$$A = \{1,2,3,4,6,12\} \text{ y } B = \{1,2,3,4,6,12,18,36\}$$

Luego se procede a dibujar el diagrama de Venn correspondiente:



Respuesta

$$A \subset B.$$

1127. Para los conjuntos $F = \{a, b, c, e, f, g, h\}$, $B = \{a, e, f\}$ y $C = \{c, f\}$, dibuje un diagrama de Venn.

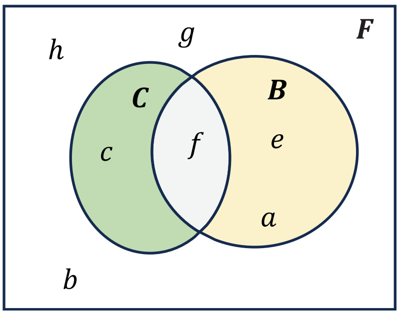
a) Anotar las inclusiones en relación a F,B y C.

b) ¿Qué inclusión se cumple para C y B?

c) ¿A qué conjunto pertenecen b,h y g?

Resolución

Se procede a mostrar el diagrama de Venn:



Respuestas

a) Del diagrama, se pueden observar las siguientes inclusiones:

$$C \subset F, B \subset F$$

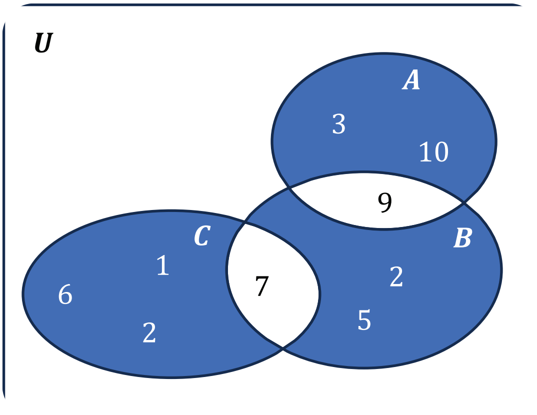
b) $\bar{C} = \{a, e, b, h, g\}$ y $\bar{B} = \{h, g, c, b\}$, luego $\bar{C} \not\subset \bar{B}$ ni $\bar{B} \not\subset \bar{C}$ (ninguna inclusión).

c) Tanto a $\bar{C}$ como a $\bar{B}$

1128. Ubicar a $A = \{3,9,10\}$, $B = \{2,5,7,9\}$ y $C = \{1,2,6,7\}$ subconjuntos de $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ en un diagrama de Venn conveniente.

Respuesta

El diagrama de Venn correspondiente a los conjuntos U,A,B y C es:



1129. Se define el conjunto universal $U = \{x \in \mathbb{Z}/-5 < x < 6\}$ donde A, B y C son subconjuntos de U. Por medio de diagramas de Venn, visualizar cuando:

a) $A \subset C$ pero $A \not\subset B$

b) $\bar{B} = \bar{A} = \bar{C}$

Resolución

Tenemos por extensión a $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Se propone a:

$A = \{-4, -3, -2, -1, \}$,

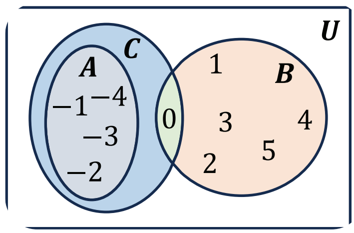
$B = \{0,1,2,3,4,5\}$ y

$C = \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$.

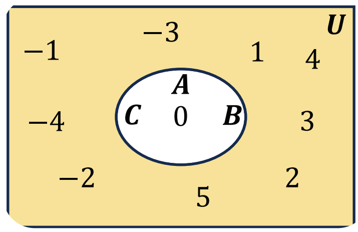
b) Al no tener restricciones sobre los conjuntos A, B y C podemos tomar $A = B = C = \{0\}$

Respuesta

a) El diagrama de Venn es:



b) El diagrama de Venn es:



1130. Sean $A=\{1,2\}\subset B=\{1,2,3\}$. Verificar que $P(A)\subset P(B)$.

Resolución

Escribimos $P(A)$ y $P(B)$ por extensión:

$$P(A)=\{\{1\},\{2\},\emptyset,\{1,2\}\}$$

y

$$P(B)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\emptyset\}$$

Se observa que $\{1\},\{2\},\emptyset,\{1,2\}$ subconjuntos de A, también son subconjuntos de B.

Respuesta

Se concluye que $P(A)\subset P(B)$.

1131. Susana planea ocupar el fin de semana en estudiar, leer su libro favorito y pintar. Como no le alcanza tiempo para hacer las tres, decide realizar una o dos actividades máximo, ¿cuáles son sus opciones?

Resolución

Se considera el siguiente conjunto: A = {leer, estudiar, pintar}.
Calculamos su conjunto de partes:
$P(A)$ = {{leer, estudiar}; {leer, pintar}; {estudiar, pintar}; {leer}, {estudiar}, {pintar}, ∅, {leer, estudiar, pintar}}
La condición del problema indica que Susana no puede hacer las tres actividades, por tanto el subconjunto {leer, estudiar, pintar} se descarta.

Respuesta

Las opciones para Susana son las siguientes:
- Leer y estudiar, leer y pintar, estudiar y pintar, solo leer, solo pintar, solo estudiar.

1132. Daniel compra una hamburguesa de un puesto de comidas. Como opciones de salsas para acompañar tiene mayonesa, mostaza, salsa de tomate y salsa picante. A Daniel no le gustan la mostaza ni las hamburguesas sin salsa. Sabiendo esto, ¿con cuáles salsas acompañaría su hamburguesa?

Resolución

Al conjunto de las salsas:
S = {mayonesa, mostaza, salsa de tomate, salsa picante} se le quita el elemento mostaza.
Por tanto S queda S_M={mayonesa, salsa de tomate, salsa picante}.
Se calcula:
$P(S_M)$ = {{mayonesa}; {salsa de tomate}; {salsa picante}; {mayonesa, salsa picante}; {mayonesa, salsa de tomate}; {salsa picante, salsa de tomate}; {mayonesa, salsa de tomate, salsa picante}, ∅}
Se descartan de $P(S_M)$ el conjunto vacío ∅ (sin salsas).

Respuesta

Daniel elegiría:
Mayonesa o salsa de tomate o salsa picante o mayonesa y salsa picante o mayonesa y salsa de tomate o salsa picante y salsa de tomate o las tres salsas.

Operaciones entre conjuntos

1133. Sean $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,3,5,6\}$, $B = \{3,6,9,10\}$ y $C = \{3,4,5,6\}$. Determinar los elementos de los siguientes conjuntos:

a) $A \cap (B - C)$

b) $C - (B - A)$

Resolución

a) Determinamos el conjunto $B - C$:

$$\{9,10\}$$

y la intersección de este último con A es:

$$\emptyset$$

b) Determinamos el conjunto $B - A$:

$$\{9,10\}$$

Ahora buscamos los elementos de C y descartamos los que también aparecen en $B - A$:

$$\{3,4,5,6\}$$

Respuestas

a) $A \cap (B - C) = \emptyset$

b) $C - (B - A) = \{3,4,5,6\} = C$

1134. Sean $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $A = \{1,4,5\}$, $B = \{1,2,4,5\}$ y $C = \{2,3,5\}$ subconjuntos de U. Determinar los elementos del siguiente conjunto:

$$[(\overline{A \cap B}) \cup (A - C)] \cap (A - B)$$

Resolución

Se calcula cada uno de los conjuntos involucrados:

$\overline{A \cap B} = \overline{\{1,4,5\}} = \{2,3,6\}$

$A - C = \{1,4\}$

$A - B = \emptyset$

Luego calculamos $\overline{A \cap B} \cup (A - C)$:

$$\{1,2,3,4,6\}$$

y calculamos:

$$[\overline{A \cap B} \cup (A - C)] \cap (A - B) = \emptyset$$

Respuesta

El conjunto no tiene elementos.

1135. Determinar los elementos del conjunto $A \triangle B$ si
$A \cup B = \{a, b, c, d\}, A \cap B = \{a, c\}$ y $A - B = \{b\}$.

Resolución

Ya que $A \cap B = \{a, c\}$ entonces tanto a como c están en A y en B.

Como $A - B = \{b\}$, el elemento b no puede estar en B, luego $b \in A$.

Así determinamos los conjuntos A y B:

$A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, c, d\}$ y calculamos $B - A = \{d\}$.

Por tanto, $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{b\} \cup \{d\}$.

Respuesta

$$A \triangle B = \{b, d\}$$

1136. Dados A y B conjuntos finitos y la propiedad:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(A) - n(A \cap B)$$

Probar que:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

Datos

$n(\emptyset) = 0$

$(A - B) \cup B = A \cup B$

Resolución

Sabemos que $(A - B) \cap B = \emptyset$,
luego $n([(A - B) \cap B]) = n(\emptyset) = 0$.
Ahora calculamos:

$$n([(A - B) \cap B]) = n(A - B) + n(B) - n([(A - B) \cup B])... (1)$$

Ya que $A \cup B = (A - B) \cup B$, entonces $n(A \cup B) = n[(A - B) \cup B]$.

Reemplazando esto en (1):

$$0 = n(A - B) + n(B) - n(A \cup B) \ ... (2)$$

Como $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, reemplazando es en (2).

$$0 = n(A - B) + n(B) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)]$$

$$= n(A - B) + n(B) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$

Finalmente, despejando $n(A-B)$:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

Respuesta
Queda demostrada la igualdad.

1137. Determinar los conjuntos A, B sabiendo que:

$A-B=\{1,4,7,9\}, B-A=\{2,5,8\}$ y $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Resolución

La diferencia simétrica entre A y B es:

$$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)=\{1,2,4,5,7,8,9\}$$

Ahora $(A\triangle B)\cap(A\cap B)=\emptyset$ (no tienen elementos en común), calculamos los elementos de $A\cap B$:

$$(A\cap B)\cup(A\triangle B)=(A\cap B)\cup\{1,2,4,5,7,8,9\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Por tanto, $A\cap B=\{3,6\}$.

Respuesta
$A=\{1,3,4,6,7,9\}$ y $B=\{2,3,5,6,8\}$.

1138. Sabiendo que $A=\{1,2,3,4\}, B=\{5,8,9\}$ y $C=\{1,9,10\}$, ¿cuántos subconjuntos no vacíos tiene el conjunto $A\cap(B\cup C)$?

Resolución

Calculamos $B\cup C=\{1,5,8,9,10\}$ y calculamos su intersección con A:

$$A\cap(B\cup C)=\{1\}$$

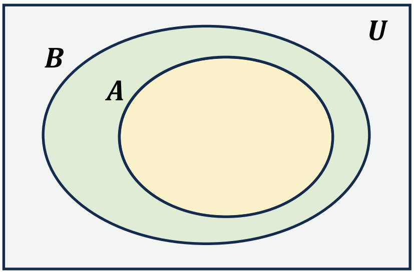
Luego calculamos $P([A\cap(B\cup C)])=\{\emptyset,\{1\}\}$

Respuesta
$A\cap(B\cup C)=\{1\}$ tiene solo un subconjunto no vacío.

1139. Sea U el conjunto universal. Sabiendo que $A \subset B$, determinar $A \triangle B$ utilizando diagramas de Venn.

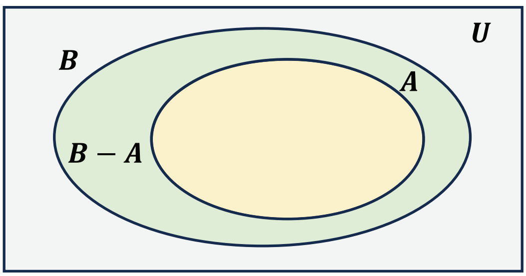
Resolución

El diagrama de Venn representativo de $A \subset B$ es:



Del diagrama, deducimos que $A - B = \emptyset$.

Luego $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = B - A$ y su correspondiente diagrama de Venn es el siguiente:



Respuesta

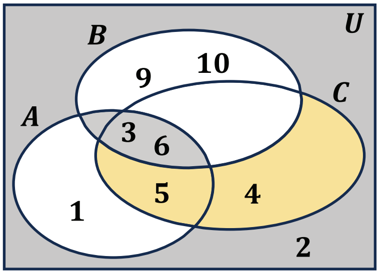
$$A \triangle B = B - A$$

1140. Elaborar un diagrama de Venn para verificar si $\overline{C - B} \subset A \cap B$; donde $U = \{n \in \mathbb{N}/1 \leq n \leq 10\}$ y $A = \{1,3,5,6\}$, $B = \{3,6,9,10\}$,

$C = \{3,4,5,6\}$.

Resolución

Se calculan $\overline{C-B} = \overline{\{4,5\}} = \{1,2,3,6,7,8,9\}$ y $A \cap B = \{3,6\}$. Luego los conjuntos no son comparables. Gráficamente:



Respuesta

La parte coloreada de amarillo representa $C - A$ y su complemento está coloreado de plomo, incluido $A \cap B$. Por tanto, no se cumple que $\overline{C-B} \subset A \cap B$, sino $A \cap B \subset \overline{C-B}$.

1141. Utilizar propiedades de los conjuntos para simplificar:

$$\overline{[A-(B\cup C)]} \cap [(A-B)\cap(\overline{B-\bar{A}})]$$

Resolución

$$\overline{[A-(B\cup C)]} \cap \left[(A-B)\cap \overline{B-\bar{A}}\right] = \overline{A\cap\overline{B\cup C}} \cap (A\cap\bar{B}) \cap \overline{B\cap\bar{\bar{A}}}$$

por igualdad de la diferencia de conjuntos,

$$= \left(\bar{A}\cup\overline{\overline{B\cup C}}\right) \cap (A\cap\bar{B}) \cap \overline{B\cap A}$$

por Ley de De Morgan e idempotencia del complemento,

$$= [\bar{A}\cup(B\cup C)] \cap (A\cap\bar{B}) \cap (\bar{A}\cup\bar{B})$$

$$= [\bar{A}\cup(B\cup C)] \cap A \cap [\bar{B}\cap(\bar{A}\cup\bar{B})]$$

$$= [\bar{A}\cup(B\cup C)] \cap A \cap \bar{B}$$

por propiedad de Absorción,

$= \{(\bar{A} \cap A) \cup [(B \cup C) \cap A]\} \cap \bar{B}$

$= [(B \cup C) \cap \bar{B}] \cap A$

$= C \cap \bar{B} \cap A = C \cap (A - B)$

Respuesta

$$\overline{[A - (B \cup C)]} \cap \left[(A - \bar{B}) \cap \left(\overline{B - \bar{A}}\right)\right] = C \cap \bar{B} \cap A$$

1142. Verificar la siguiente igualdad de conjuntos:

$$(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$$

Resolución

$$(A - B) \cap (A - C) = (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C})$$

por igualdad de la diferencia de conjuntos,

$$= A \cap (\bar{B} \cap \bar{C})$$

$$= A \cap \overline{B \cup C}$$

$$= A - (B \cup C)$$

Respuesta
Queda verificada la igualdad.

1143. Utilizar propiedades de los conjuntos para simplificar:

$$\bar{A} \triangle \overline{B - \bar{A}}$$

Resolución

$$\bar{A} \triangle \overline{B - \bar{A}} = \bar{A} \triangle \overline{B \cap A}$$

por Ley de De Morgan e idempotencia del complemento,

$$= (\bar{A} - \overline{B \cap A}) \cup (\overline{B \cap A} - \bar{A})$$

por propiedad de la diferencia simétrica.

$$= (\bar{A} \cap B \cap A) \cup [(\bar{B} \cup \bar{A}) \cap A]$$

$$= (\bar{B} \cup \bar{A}) \cap A$$

$$= (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap A)$$

$$= (A \cap \bar{B}) \cup \emptyset$$

$$= A \cap \bar{B}$$

$$= A - B$$

Respuesta
Simplificada la expresión, obtenemos:

$$\bar{A} \triangle \overline{B - \bar{A}} = A - B$$

1144. Mostrar la siguiente propiedad de la diferencia simétrica:

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$$

Resolución

$(A \triangle B) \cap C = [(A - B) \cup (B - A)] \cap C$

por igualdad de la diferencia simétrica,

$$= [(A - B) \cap C] \cup [(B - A) \cap C]$$

$$= [A \cap C \cap \bar{B}] \cup [B \cap C \cap \bar{A}]$$

$$= [(A \cap C \cap \bar{B}) \cup (A \cap C \cap \bar{C})] \cup [(B \cap C \cap \bar{A}) \cup (B \cap C \cap \bar{C})]$$

pues $A \cap C \cap \bar{C} = \emptyset$ y $B \cap C \cap \bar{C} = \emptyset$,

$$= [(A \cap C) \cap \overline{B \cap C}] \cup [(B \cap C) \cap \overline{A \cap C}]$$

por propiedad distributiva y Ley de De Morgan,

$$= [(A \cap C) - (B \cap C)] \cup [(B \cap C) - (A \cap C)]$$

$$= (A \cap C) \triangle (B \cap C)$$

Respuesta
Queda demostrada la siguiente igualdad de conjuntos:

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$$

1145. ¿A qué conjunto es igual el complemento de la diferencia simétrica entre dos conjuntos $A \subset U$ y $B \subset U$?

Resolución

$$\overline{A \triangle B} = \overline{(A - B) \cup (B - A)} = \overline{A - B} \cap \overline{B - A} = (\bar{A} \cup \bar{\bar{B}}) \cap (\bar{B} \cup \bar{\bar{A}})$$

$$= (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A) = [(\bar{A} \cup B) \cap \bar{B}] \cup [(\bar{A} \cup B) \cap A]$$

$$= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = (A \cap B) \cup \overline{A \cup B}$$

Respuesta

$$\overline{A \triangle B} = (A \cap B) \cup \overline{A \cup B}$$

1146. Una empresa tiene 300 empleados, de los cuales 160 obtuvieron un aumento de salario, 100 fueron promovidos y 60 obtuvieron un aumento de salario y fueron promovidos. Calcular las cantidades de empleados que obtuvieron un aumento de salario, pero no fueron promovidos y los que no fueron ni promovidos ni tuvieron aumento de salario.

Resolución

A: Empleados que tuvieron aumento de salario.

B: Empleados promovidos.

$A \cap B$: Empleados con aumento de salario y promovidos.

$A - B$: Empleados que tuvieron aumento de salario, pero no fueron promovidos.

$\overline{A \cup B}$: Empleados que ni tuvieron aumento de salario ni fueron promovidos.

Calculando $n(A - B)$:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 160 - 60 = 100$$

Ahora:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 160 + 100 - 60 = 200$$

y

$$n(\overline{A \cup B}) = 300 - n(A \cup B) = 100$$

Respuesta
A 100 empleados sólo se les aumentó el sueldo, mientras que a 100 no se les promovió ni aumentó el sueldo.

1147. En un campamento, 70 campistas participan en senderismo, 40 en natación y 20 practican ambas actividades. Si hay 100 campistas en total, ¿cuántos no participan en ninguna de estas actividades?

Resolución

A: Los que practican senderismo.

B: Los que practican natación.

$A \cap B$: Los que practican ambos.

$A \cup B$: Los que practican al menos en una actividad.

$\overline{A \cup B}$: Los que no practican ninguna de estas actividades.

Calculando:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 40 - 20 = 90$$

y

$$n(\overline{A \cup B}) = 100 - n(A \cup B) = 10$$

Respuesta
Hay 10 campistas que no participan ni en senderismo ni natación.

1148. En una feria escolar participaron 80 estudiantes con temas científicos, 70 con temas artísticos y 50 con temas que juntaban ambas áreas. Si el total de estudiantes fueron 120, ¿cuántos no participaron?

Resolución

A: Temas científicos.

B: Temas artísticos.

$A \cap B$: Temas tanto científicos como artísticos.

$A \cup B$: Los que al menos practican ajedrez o participan en el club de debate.

$\overline{A \cup B}$: Los que no participaron en la feria.

Las cardinalidades son:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 80 + 70 - 50 = 100$$

Finalmente:

$$n(\overline{A \cup B}) = 120 - 100 = 20$$

Respuesta
En total 20 estudiantes no participaron en la feria.

1149. En una fiesta, 40 personas prefieren soda y 30 personas prefieren jugos. Si 15 invitados prefieren ambos, ¿cuántas prefieren sólo refresco o sólo jugo y cuántas prefieren al menos uno de los dos?

Resolución

A: Invitados que prefieren soda.

B: Invitados que prefieren jugos.

$A \cap B$: Invitados que prefieren ambos.

$A - B$: Invitados que sólo prefieren soda.

$B - A$: Invitados que sólo prefieren jugos.

$A \triangle B$: Invitados que sólo prefieren soda o sólo jugos.

$A \cup B$: Invitados que prefieren jugos o soda.

Las cardinalidades son:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 40 - 15 = 25$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A) = 30 - 15 = 15$$

Luego: $n(A \triangle B) = n(A - B) + n(B - A) = 40$

Finalmente:

$$n(A \cup B) = 40 + 30 - 15 = 55$$

Respuesta
A 40 invitados sólo prefieren una bebida y a 55 al menos una.

1150. En una exposición, 55 personas visitaron el pabellón de tecnología 45 el pabellón de ciencias y 25 ambos pabellones. Si a la exposición fueron un total de 90 visitantes, ¿cuántas no visitaron ninguno de los dos pabellones?

Resolución

A: Visitantes al pabellón de tecnología.

B: Visitantes al pabellón de ciencias.

$A \cap B$: Visitantes de ambos pabellones.

$A \cup B$:Visitantes de al menos visitaron un pabellón.

Las cardinalidades son:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 55 - 45 - 25 = 75$$

Finalmente:

$$n(\overline{A \cup B}) = 90 - 75 = 15$$

Respuesta
Un total de 15 visitantes no visitó ninguno de los dos pabellones.

Tablas de verdad

1151. Para las siguientes proposiciones simples:

- p: Hoy está soleado.
- q: Hace frío.

Escribe en lenguaje habitual las siguientes proposiciones compuestas:

a) $p \wedge \sim q$

b) $p \Rightarrow q$

c) $p \Leftrightarrow q$

d) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

Respuestas

a) Hoy está soleado y no hace frío.
b) Si hoy está soleado, entonces hace frío.
c)Hoy está soleado si y solo sí hoy hace frío.
d) Hoy no está soleado, si y solo sí no hace frío.

1152. Escribir en forma simbólica cada una de las siguientes proposiciones compuestas:

a) Si ella no termina a tiempo, no tiene ganas de estudiar.
b) Si Lucas es perseverante, entonces tanto Abel como Carlos son pacientes.
c)Mi equipo perdió si y solo si no estaban en forma.

Respuestas

a) Esto es p: Ella termina a tiempo y q: Ella tiene ganas de trabajar. En símbolos lógicos:

$$p \Rightarrow q$$

b) Esto es p: Lucas es perseverante, q: Abel es paciente y r: Carlos es paciente. En símbolos lógicos:

$$p \Rightarrow (q \wedge r)$$

c)Esto es p: Mi equipo perdió y r: Estaban en forma. En símbolos lógicos:

$$p \Leftrightarrow \sim q$$

1153. La tarea de Julia pide identificar si las siguientes proposiciones son simples:

a) p: "El carbono es un metal"

b) q: "La fotosíntesis es un proceso que ocurre en las plantas"

Si alguna lo es, ¿cuál es su valor de verdad?

Respuestas

a) La proposición es simple y su valor de verdad es F.

b) La proposición también es simple y su valor de verdad es V.

1154. Martín es un fiscal y lee un acta de un juicio. En el proceso encuentra las siguientes frases:

- ¿Dónde estaba usted a medianoche?
- La ventana estaba rota.
- Ocurrió a medianoche.
- Las huellas digitales coinciden.
- Buenos días oficial, ¿Cómo podemos ayudar en la investigación?

Clasificar los elementos de la lista en una tabla.

Respuesta

Si es proposición simple...	No es proposición simple...
La ventana estaba rota.	Buenos días oficial, ¿cómo podemos ayudar en la investigación?
Ocurrió a medianoche.	¿Dónde estaba usted a medianoche?
Las huellas digitales coinciden.	

1155. La obra cumbre de Miguel de Cervantes "Don Quijote de la Mancha" contiene las siguientes proposiciones:

- p: Don Quijote es un caballero andante.
- q: Sancho Panza es el fiel escudero de Don Quijote.
- r: Don Quijote lucha contra molinos de viento.

Escribir dos proposiciones compuestas que reflejen un aspecto relevante de la historia de "Don Quijote de la Mancha".

Resolución

En símbolos, una proposición compuesta que encajaría es:

$$(q \wedge r)$$

la cual en lenguaje común expresa:

"Don Quijote es un caballero andante y lucha contra molinos de viento".

La segunda proposición que encaja con la historia es:

$$p \Rightarrow q$$

la cual en lenguaje común expresa:

"Si Don Quijote es un caballero andante, entonces Sancho Panza es su fiel escudero".

Respuestas

$(q \wedge r)$: "Don Quijote es un caballero andante y lucha contra molinos de viento".

$p \Rightarrow q$: "Si Don Quijote es un caballero andante, entonces Sancho Panza es su fiel escudero".

1156. Mediante una tabla de verdad, verificar si la siguiente proposición compuesta:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$$

es una contradicción, tautología o contingencia.

Resolución

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Respuesta

La proposición es una contingencia.

1157. Dada la siguiente tabla de verdad, llenar los espacios en blanco de conjunciones con los valores de verdad dados.

V	V	$p \wedge \sim q$
V	F	
F	V	
F	F	

Resolución

Las conjunciones posibles son $p \wedge q, \sim p \wedge q, \sim p \wedge \sim q$ y

$\sim p \wedge q$. Acorde a los valores de verdad asignados tanto a $\sim p$ como a q, completamos la tabla:

Respuesta

p	q	Conjunción
V	V	$p \wedge \sim q$
V	F	$p \wedge q$
F	V	$\sim p \wedge \sim q$
F	F	$\sim p \wedge q$

1158. Dada la siguiente tabla de verdad, se pide llenar los espacios en blanco con disyunciones, acorde a los valores de verdad dados.

V	V	
V	F	
F	V	
F	F	$\sim \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$

Resolución

Las disyunciones posibles son $p \vee q, \sim p \vee q, \sim p \vee \sim q$ y $\sim p \vee q$. Acorde a los valores de verdad asignados tanto a $\sim p$ como a q, completamos la tabla:

Respuesta

p	q	Disyunción
V	V	$p \vee \sim q$
V	F	$p \vee q$
F	V	$\sim p \vee \sim q$
F	F	$\sim p \vee q$

Álgebra de proposiciones

1159. ¿Es una contradicción la siguiente proposición?

$$[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)] \vee [(\sim q \vee \sim r) \vee \sim(q \vee r)]$$

Resolución

Se procede a simplificar la proposición:

$$[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)] \vee [(\sim q \vee \sim r) \vee \sim(q \vee r)]$$

$$\equiv \big[\big((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)\big) \vee (\sim q \vee \sim r)\big] \vee \sim(q \vee r)$$

$$\equiv (\sim q \vee \sim r) \vee \sim(q \vee r)$$

$$\equiv (\sim q \vee \sim r) \vee (\sim q \wedge \sim r)$$

$$\equiv \sim r \vee [\sim q \vee (\sim q \wedge \sim r)]$$

$$\equiv \sim r \vee \sim q$$

Por tanto $[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)] \vee [(\sim q \vee \sim r) \vee \sim(q \vee r)] \equiv \sim r \vee \sim q$

Respuesta

$[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)] \vee [(\sim q \vee \sim r) \vee \sim(q \vee r)]$

será una contradicción, cuando $r \equiv V$ y $q \equiv V$.

1160. ¿Es la simplificación de la siguiente proposición:

$$[q \Rightarrow (r \wedge \sim q)] \Rightarrow [(q \wedge \sim p) \Rightarrow r]$$

una tautología?

Resolución

$$[q \Rightarrow (r \wedge \sim q)] \Rightarrow [(q \wedge \sim p) \Rightarrow r] \equiv \sim[\sim q \vee (r \wedge \sim q)] \vee [\sim q \vee p \vee r]$$

$$\equiv [q \wedge (q \vee \sim r)] \vee (\sim q \vee p \vee r)$$

$$\equiv (q \vee \sim q) \vee p \vee r$$

$$\equiv V \vee p \vee r$$

$$\equiv V$$

Respuesta
Sí, es una tautología.

1161. Sabiendo que la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ es falsa, hallar el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$\sim(p \vee r) \Rightarrow (p \vee q)$$

Resolución

Al ser la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ falsa y al estar tanto $(p \wedge q)$ como $(q \Rightarrow r)$ conectadas por una implicación, sus valores de verdad son $(p \wedge q) \equiv$ V y $(q \Rightarrow r) \equiv F$. Un argumento similar permite concluir otra vez que $p \equiv V$, $q \equiv V$ y $r \equiv F$. Por tanto:

$$\sim(p \vee r) \Rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(V \vee F) \Rightarrow (V \wedge V) \equiv \sim F \Rightarrow V \equiv V \Rightarrow V \equiv V$$

Respuesta
$\sim(p \vee r) \Rightarrow (p \vee q) \equiv V$.

1162. Si la proposición $p \Rightarrow (r \vee s)$ es falsa, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a) $(\sim s \vee t) \vee \sim p$

b) $r \Leftrightarrow p$

c) $t \Rightarrow \sim r$

d) $(r \Rightarrow p) \vee (s \Rightarrow t)$

Resolución

Si la implicación $p \Rightarrow (r \vee s)$ es falsa, se concluye directamente que $p \equiv V$ y que $(r \vee s) \equiv F$.

De modo similar, obtenemos valores de verdad para p, r y s:

$$p \equiv V, r \equiv F, s \equiv F$$

a) $[(\sim s \vee t) \vee \sim p] \equiv [(V \vee t) \vee F] \equiv (V \vee F) \equiv V$

b) $r \Leftrightarrow p \equiv V \Leftrightarrow F \equiv F$

c) $t \Rightarrow \sim r \equiv t \Rightarrow V \equiv V$

d) $(r \Rightarrow p) \vee (s \Rightarrow t) \equiv (F \Rightarrow V) \vee (F \Rightarrow t) \equiv V \vee V \equiv V$

Respuestas

a) $[(\sim s \vee t) \vee \sim p] \equiv V$

b) $r \Leftrightarrow p \equiv F$

c) $t \Rightarrow \sim r \equiv F$

d) $(r \Rightarrow p) \vee (s \Rightarrow t) \equiv V$

1163. Sin utilizar tablas de verdad, argumente la tautología de la siguiente proposición:

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

Respuesta

Si $p \equiv F$, la proposición automáticamente es una tautología.

Si $p \equiv V$, depende del valor que pueda tomar $(p \vee q)$; sin embargo,

$$p \vee q \equiv V \vee q \equiv V$$

sin importar el valor que tome q, por tanto $p \Rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.

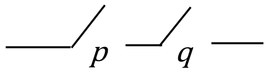
1164. Construir los circuitos lógicos para las siguientes proposiciones:

a) $(\sim q \vee p) \wedge \sim p$

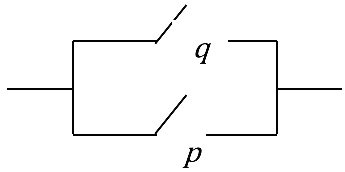
b) $\sim p \vee [\sim p \vee \big(q \vee (p \wedge q)\big)]$

Resolución

Procedemos a dibujar los circuitos lógicos, notando que las proposiciones $p \wedge q$ y $p \vee q$ se dibujan así:



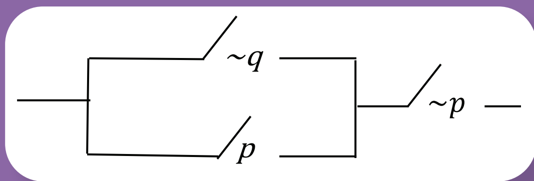
$p \wedge q$



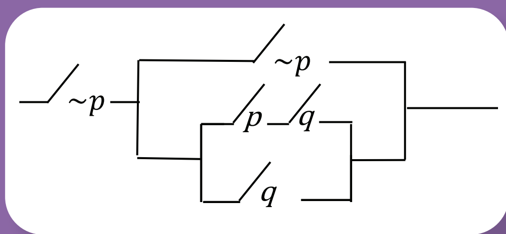
$p \vee q$

Respuestas

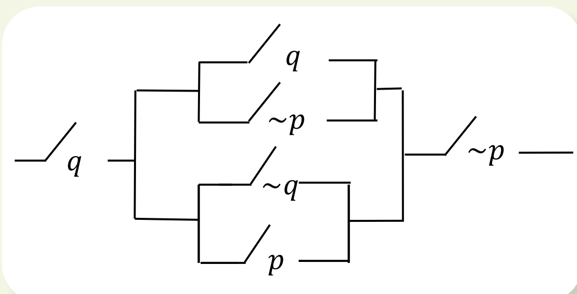
a)



b)



1165. Para el siguiente circuito, encontrar la proposición equivalente y simplificarla:



Resolución

A partir del circuito se simboliza:

$$q \wedge [(q \vee \sim p) \vee (\sim q \vee p)] \wedge \sim p$$

Ahora, se procede a simplificar la proposición:

$$q \wedge [(q \vee \sim p) \vee (\sim q \vee p)] \wedge \sim p \equiv q \wedge [(q \vee \sim q) \vee (p \vee \sim p)] \wedge \sim p$$

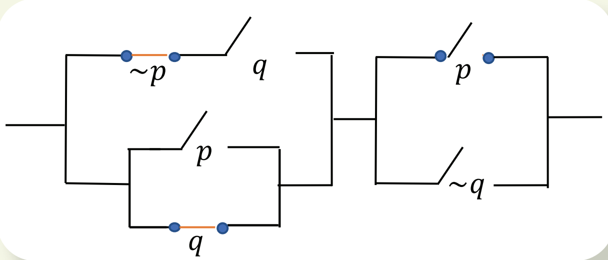
$$\equiv q \wedge [(q \vee \sim q) \vee (p \vee \sim p)] \wedge \sim p$$

$$\equiv q \wedge (V \vee V) \wedge \sim p$$

$$\equiv q \wedge \sim p$$

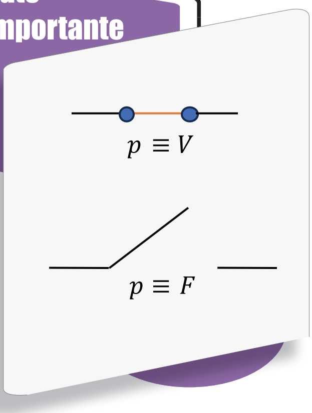
Respuesta
La proposición equivalente es $q \wedge \sim p$

1166. Escribir la fórmula lógica del siguiente circuito:



Luego de simplificarla, ¿cuál es su valor de verdad?

Dato importante



Resolución

Se procede a simbolizar el circuito lógico:

$[(\sim p \wedge q) \vee (p \vee q)] \wedge (p \vee \sim q)$

Luego, reemplazando los valores de verdad:

$$[(\sim p \wedge q) \vee (p \vee q)] \wedge (p \vee \sim q)$$

$$\equiv [(V \wedge F) \vee (F \vee V)] \wedge (V \vee F)$$

$$\equiv (F \vee V) \wedge V \equiv V \wedge V \equiv V$$

Respuesta
El valor de verdad de la proposición es verdadero.

Conjuntos por comprensión y extensión

1167. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas? En caso de ser falsa, explique el motivo.

a) Para cualquier par de conjuntos A y B, $P(A) \cap P(B) \neq \emptyset$.

b) $\{1\} \in \mathbb{N}$

c) $\{1\} \subset \mathbb{N}$

d) $\{z/z \neq z\} \neq \emptyset$

Respuestas

a) Verdadera
b) Falsa, $\{1\}$ es un conjunto, no un elemento.
c) Verdadera
d) Falsa, un elemento de un conjunto, siempre es igual a sí mismo.

1168. Escribir el conjunto P por extensión:

$$P = \{z = \frac{r}{s} / z \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}, -1 < r \leq 3, 0 < s \leq 3\}$$

Resolución

El conjunto P colecciona fracciones, para las cuales el numerador está entre -1 y 3 y el denominador está entre 0 y 3.

El numerador r puede tomar los siguientes valores: 0, 1, 2, 3.

El denominador puede tomar 1, 2, 3.

Es posible formar las siguientes fracciones:

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}$$

Respuesta

$$\boldsymbol{P} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}\right\}$$

1169. Escriba el siguiente conjunto por extensión:

$$B = \{a_n / a_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n + 1, 1 \leq n \leq 5; n \in \mathbb{N}\}$$

Resolución

Se calculan los a_n:

$$a_1 = \left(-\frac{1}{1}\right)^1 + 1 = 0,\ a_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4},\ a_3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 1 = \frac{26}{27}$$

$$a_4 = \left(-\frac{1}{4}\right)^4 + 1 = \frac{257}{256},\ a_5 = \left(-\frac{1}{5}\right)^5 + 1 = \frac{3124}{3125}$$

con n = 1, 2, 3, 4, 5.

Respuesta

$$B = \left\{0, \frac{5}{4}, \frac{26}{27}, \frac{257}{256}, \frac{3124}{3125}\right\}$$

1170. Alison lanza 3 monedas y va anotando los resultados según el siguiente criterio: "Si la moneda toca número, se anota 1 y si la moneda toca escudo, se anota 0". Escribir por extensión el conjunto de todos los posibles resultados.

Resolución

Denotamos al conjunto de los posibles resultados con la letra M.
Se anotan los resultados como sigue:
Si sale 3 veces número, según el criterio de Alison se anota [1, 1, 1].

Respuesta

$M = \{[0; 0; 0], [0; 0; 1], [0; 1; 1], [1; 0; 0], [0; 1; 0], [1; 1; 0], [1; 0; 1], [1; 1; 1]\}$

1171. Ahora la tarea de Alison es, una vez obtenido el conjunto de lanzamientos

$M = \{[0; 0; 0], [0; 0; 1], [0; 1; 1], [1; 0; 0], [0; 1; 0], [1; 1; 0], [1; 0; 1], [1; 1; 1]\}$

determinar por extensión los subconjuntos que cumplen:

a) Se obtienen más caras que sellos.
b) Se obtienen al menos dos caras.
c) Se obtiene al menos un sello.
d) Se obtienen el mismo resultado en las tres monedas.

Resolución

- Los elementos de M con más caras que sellos son:

$$[0;1;1],[1;1;0],[1;0;1],[1;1;1]$$

- Los elementos de M con al menos dos caras son:

$$[0;1;1];\ [1;1;0];\ [1;0;1],[1;1;1]$$

- Los elementos de M con al menos un sello son:

$$[0;0;0],[0;0;1],[0;1;1],[1;0;0],[0;1;0],[1;1;0],[1;0;1]$$

- Los elementos de M con el mismo resultado en las tres monedas son:

$$[0;0;0],[1;1;1]$$

Respuestas

a) $C_1 = \{[0;1;1],[1;1;0],[1;0;1],[1;1;1]\}$

b) $C_2 = \{[0;1;1];\ [1;1;0];\ [1;0;1],[1;1;1]\}$

c) $C_3 = \{[0;0;0],[0;0;1],[0;1;1],[1;0;0],[0;1;0],[1;1;0],[1;0;1]\}$

d) $C_4 = \{[0;0;0],[1;1;1]\}$

1172. Encontrar la suma de las cardinalidades de B y C, donde:
$B = \{n/n \in \mathbb{N} \wedge (9n^2+6n+1=0)\}$ y $C = \{\frac{1}{p}/p \in \mathbb{R} \wedge (16p^2+8p+1=0)\}$

Resolución

La propiedad de B involucra la ecuación: $9n^2+6n+1=0$, la cual resolvemos:

$$9n^2+6n+1=(3n+1)^2=0$$

Esta última igualdad no tiene solución en $\mathbb{N}$. Luego $B=\emptyset$ y $n(B)=0$.

La propiedad de C es similar:

$$16p^2+8p+1=(4p+1)^2=0$$

Por tanto, $p=-\frac{1}{4}$ y luego $C=\left\{\frac{1}{-\frac{1}{4}}\right\}=\{-4\}$ y $n(C)=1$

Respuesta

$$n(B) + n(C) = 1$$

1173. Sean $A = \{-3\}, B = \{-2\}, C = \{x - y\}$ y $D = \{x + y\}$. Si $A = C$ y $B = D$, encuentre el elemento de $E = \{x\}$ y $F = \{y\}$.

Resolución

Los conjuntos unitarios son iguales, $\{-3\} = \{x - y\}$ y $\{-2\} = \{x + y\}$ entonces

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, encontramos que:

$$x = -\frac{5}{2}, y = \frac{1}{2}$$

Respuesta

$E = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$ y $F = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

1174. Sean $M = \{x + 5, \ 4\}$ y $N = \{\sqrt[3]{y} + 49\}$. Si M es unitario y $M = N$, ¿cuál es el valor de $x \cdot y$?

Resolución

Al ser M un conjunto unitario,

$$x + 5 = 4$$

de modo que $x = -1$. Como $M = \{-1\} = N$, entonces

$$\sqrt[3]{y + 49} = -1$$

donde $y = -50$.

Respuesta

El producto es $x \cdot y = 50$.

Relaciones entre conjuntos

1175. Sean $A = \{y \in \mathbb{R} / y^2 = y\}$ y $B = \{z \in \mathbb{R} / z \cdot (z-1) = 0\}$, ¿Son iguales los conjuntos A y B?

Resolución

Se escribe A por extensión, para esto resolvemos la ecuación $y^2 = y$ en $\mathbb{R}$:

$$y^2 - y = y \cdot (y-1) = 0$$

Luego $y = 0$ o $y = 1$; es decir, $A = \{0,1\}$.

Se escribe B por extensión. Sea algún $z \in B$:

$$z \cdot (z-1) = 0$$

entonces $z = 0$ o $z = 1$; es decir, $B = \{0,1\}$

Respuesta
Los conjuntos son iguales.

1176. Sea el conjunto universo $U = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, -9, 10\}$ y los subconjuntos $A = \{-1, -3, -5, 6\}$, $B = \{-3, 4, -5, 6\}$ y $C = \{2, 8\}$. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $A \subset B$ b) $\{-3,4,6\} \subset B$ c) $\emptyset \subset C$ d) $B \subset B$
e) $\{\emptyset\} \in B$ f) $\overline{-10} \subset U$ g) $-3 \in \emptyset$ h) $A \subset C$

Respuestas

a) Es falso, pues $-1 \notin B$.
b) Es verdadero, pues cada elemento de {-3, 4, 6} forma parte de B.
c) Es verdadero, pues $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto.
d) Es verdadero, pues todo conjunto está contenido en sí mismo.
e) Es falso, pues $\{\emptyset\}$ es un conjunto.
f) Es falso, pues -10 es un elemento de U.
g) Es falso, pues $\emptyset$ no tiene elementos por definición.
h) Es verdadero.

1177. Sea $U = \{1, a, 2, b, 3, c\}$ el universo de discurso y los subconjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1,2,c\}$. Calcular $\bar{A}$, $\bar{B}$, $P(\bar{A})$ y $P(\bar{B})$.

Respuestas

Se calculan primero los complementos de A y B:

$$\bar{A} = \{1,2,3\} \text{ y } \bar{B} = \{a, b, 3\}.$$

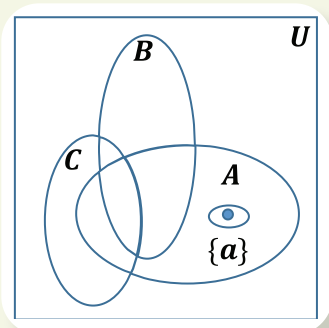
Los conjuntos potencia son:

$$P(\bar{A}) = \{\emptyset; \{1,2,3\}; \{1,2\}; \{2,3\}; \{1,3\}; \{1\}; \{2\}; \{3\}\}$$

y

$$P(\bar{B}) = \{\emptyset; \{a, b, 3\}; \{a, b\}; \{a, 3\}; \{b, 3\}; \{a\}, \{b\}, \{3\}\}.$$

1178. En el siguiente diagrama de Venn:

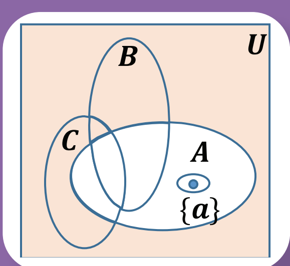


colorear la parte que corresponde a:

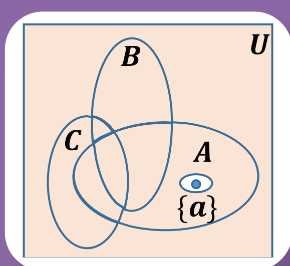
a) $\bar{A}$ b) $\overline{\{a\}}, a \in a$ c) $\bar{B}$

Respuestas

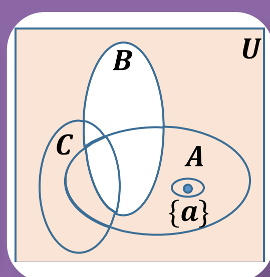
a) $\bar{A}$



b) $\overline{\{a\}}$



c) $\bar{B}$



1179. Carlos combina témperas con los colores azul, rojo y blanco, ¿qué colores podría obtendrá al mezclar 2 colores?

Resolución

Se construye el conjunto C ={azul, rojo, blanco} de los colores de las témperas.

Hallamos el conjunto de partes:

$P(C)$ ={{azul}; {rojo}; {blanco}; {azul, rojo}; {azul, blanco}; {rojo, blanco}; {azul, rojo, blanco}; ∅}.

Seleccionamos los subconjuntos de dos elementos:

{azul; rojo}, {azul; blanco}, {rojo, blanco}

Al combinar azul y rojo, azul y blanco y rojo con blanco, obtenemos violeta, azul claro y rosa, respectivamente.

Respuesta
Carlos podría obtener los colores violeta, azul claro o rosa.

1180. Javier debe introducir tres monedas, cada una de 50 centavos, un boliviano y dos bolivianos en una máquina, la cual devuelve al azar una cantidad multiplicada por 10, ¿cuáles son los posibles montos que se pueden obtener?

Resolución

Se construye el conjunto $G = \{0{,}50;\ 1;\ 2\}$ de las cantidades en dinero y se procede a calcular su conjunto de partes:

$$P(G) = \{\emptyset, \{0{,}50;\ 1;\ 2\}; \{0{,}50\}; \{1\}; \{2\}; \{0{,}50; 1\}; \{0{,}50; 2\}; \{1; 2\}\}$$

El conjunto vacío implica cero ganancias, con esto sumamos las cantidades de cada subconjunto.

Respuesta
Los posibles montos, acorde a la condición del problema son 0, 35, 5, 10, 20, 15, 25 y 30 bolivianos.

1181. Para el conjunto de letras del alfabeto U, sea V el subconjunto de las vocales. Un **diptongo** es una secuencia de dos vocales distintas que se pronuncian juntas en una misma sílaba, por ejemplo, en la palabra "crec**ie**nte" el diptongo aparece en la segunda sílaba "cien".
Encontrar los subconjuntos de V, cuyas vocales se utilicen para formar diptongos.

Dato importante

Para un conjunto finito A y $n(A)$ la cantidad de elementos que contiene, $\boldsymbol{n(P(A)) = 2^{n(A)}}$; es decir, si A tiene 3 elementos, se pueden construir $2^3 = 8$ subconjuntos de A.

Resolución

El conjunto $V = \{a, e, i, o, u\} \subset U$ contiene 5 elementos; es decir, $n(V) = 5$. Por tanto, se pueden construir $2^5 = 32$ subconjuntos de V.

En nuestro caso, buscamos solo aquellos con 2 elementos. Los subconjuntos son:

$$\{a, e\}, \{a, i\}, \{a, o\}. \{a, u\}, \{e, i\}, \{e, o\}, \{e, u\}, \{i, o\}, \{i, u\}.$$

Respuesta
Hay 9 subconjuntos de A , cuyas vocales se usan para formar diptongos.

1182. En el conjunto de los números naturales, definimos los siguientes subconjuntos:

$$A = \{m \in \mathbb{N}/m^2 - 3m + 2 = 0\}, B = \{m \in \mathbb{N}/m < 3\}$$

¿Es el conjunto A igual a B?

Resolución

Por extensión, $A = \{2,1\}$ y resolviendo $m^2 - 3m + 2 = 0$, tenemos

$$(m - 2) \cdot (m - 1) = 0$$

donde los valores que satisfacen la igualdad son 2 y 1, por tanto

$A = \{2,1\}$.

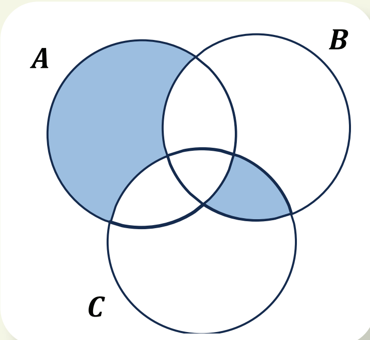
Ahora escribiendo B por extensión, los números naturales menores que 3 son 2 y 1, luego $B = \{1,2\}$

Respuesta
Si es cierto que $A = B$.

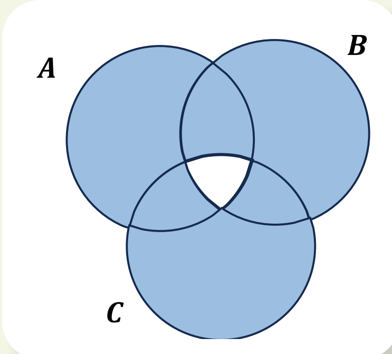
Operaciones entre conjuntos

1183. En el siguiente diagrama de Venn, encontrar la expresión que representa la parte sombreada.

a)



b)



Respuesta

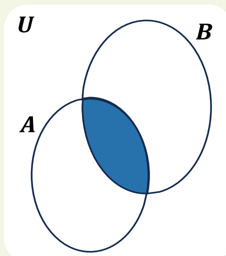
a) El diagrama de Venn representa al conjunto:

$$[A-(B\cup C)]\cup[(B\cap C)-A]$$

a) El diagrama de Venn representa al conjunto:

$$(A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C)$$

1184. ¿Es el área sombreada, en el siguiente diagrama de Venn, una correcta representación del conjunto A - (A - B)?



Resolución

Simplificando:

$$A-(A-B)=A\cap\overline{A\cap\bar{B}}$$

$$=A\cap(\bar{A}\cup B)$$

$$=(A\cap\bar{A})\cup(A\cap B)$$

$$=A\cap B$$

Respuesta
Sí, el área pintada corresponde al conjunto $A \cap B = A - (A - B)$.

1185. Para los subconjuntos A y B de U, se verifica:

$$A \triangle B = A \cup B$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) $\bar{A} \cap B = B$ b) $A \cap B = \emptyset$

Resolución

a) Es cierto, pues $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B = A \triangle B$.

b) Es cierto, pues $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = A \cup B$ implica que $A \cap B = \emptyset$ para verificar la igualdad.

Respuesta
Ambas afirmaciones son ciertas.

1186. Sean A, B conjuntos finitos. Calcular $n[P(A \cap B)]$ si se sabe que $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ y $n(A \cup B) = 6$.

Resolución

De la cardinalidad de la unión $A \cup B$, despejamos $n(A \cap B)$ y obtenemos:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

Reemplazando los valores tenemos:

$$n(A \cap B) = 4 + 5 - 6 = 3$$

La cantidad de subconjuntos de $P(A \cap B)$ viene dado por

$$2^{n(A \cap B)} = 2^3 = 8$$

Respuesta
$n[P(A \cap B)] = 8$

1187. ¿Cuáles son los conjuntos A,B y U; si se sabe que $A \cup B = \{a, b, c, e, f, g, h\}$, $A \cap B = \{a, e\}$ y $\bar{B} = \{c, d, g, i\}$?

Resolución

Se procede a calcular U:

$$(A \cup B) \cup \bar{B} = U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

Luego $B = \{a, b, e, f, h\}$.

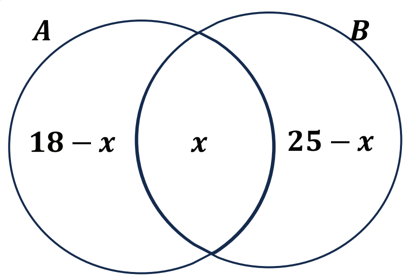
Por otra parte $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap C) = \{b, c, f, g, h\}$; de modo que $B - A = \{b, f, h\}$, por tanto $A = \{a, c, e, g\}$.

Respuesta

Los conjuntos buscados son $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$,

$A = \{a, c, e, g\}$ y $B = \{a, b, e, f, h\}$.

1188. Para el siguiente diagrama de Venn, encontrar el valor de x, sabiendo que $n(A \cup B) = 31$.



Resolución

Del diagrama, $n(A - B) = 18 - x$, $n(B - A) = 25 - x$ y $n(A \cap B) = x$.

Luego $31 = n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$

$$31 = 18 - x + 25 - x + x$$

Despejando x: $43 - x = 31$, entonces $x = 12$

Respuesta

El valor de x es 12.

1189. En un supermercado, 90 clientes compraron frutas, 70 compraron verduras mientras que 50 compraron ambos, ¿cuántos clientes compraron sólo frutas, compraron sólo verduras y compraron al menos uno de los dos?

Resolución

A: Clientes que compraron fruta, $n(A) = 90$.

B: Clientes que compraron verduras, $n(B) = 70$.

$A - B$: Clientes que compraron sólo fruta:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 90 - 50 = 40$$

$B - A$: Clientes que compraron sólo verduras:

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 70 - 50 = 20$$

$A \cup B$: Clientes que compraron frutas o verduras:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 90 + 70 - 50 = 110$$

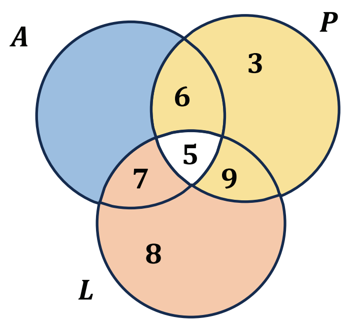
Respuesta
Los clientes que compraron sólo frutas fueron 40, los que compraron sólo verduras fueron 20 y 110 al menos compraron algo de fruta o verdura.

1190. Una fraternidad encargó a una empresa costurera la confección de 38 camisetas distintivas, 18 contenían algodón, 23 poliéster y 29 lana. De estas, 3 estaban confeccionadas sólo con poliéster y 8 sólo con lana; 9 de las camisetas con sólo poliéster y lana y 5 de los tres materiales. Realizar un diagrama de Venn y responder:

a) ¿Cuántas camisetas estaban confeccionadas con algodón y poliéster?
b) ¿Cuántas solo confeccionadas con algodón?
c) ¿Cuántas solo confeccionadas con algodón y popelina?

Resolución

Se procede a dibujar un diagrama de Venn que reflejará las cantidades que se pide, con A, P y L representando las camisetas cuya confección lleva algodón, poliéster y lana, respectivamente.



Respuesta
a) 7 camisetas solamente llevan algodón y poliéster.
b) Ninguna camiseta está confeccionada sólamente algodón.
c) 11 camisetas están confeccionadas sólamente con algodón y popelina.

Álgebra de conjuntos

1191. Simplificar:

$$(A \triangle B) \cap \overline{A - B}$$

Resolución

Simplificando:

$$(A \triangle B) \cap \overline{A - B} = [(A - B) \cup (B - A)] \cap \overline{A - B}$$

$$= \emptyset \cup (B - A) \cap \overline{A - B}$$

$$= B \cap [\bar{A} \cap (\bar{A} \cup B)]$$

$$= B \cap \bar{A} = B - A$$

Respuesta

$$A \triangle B \cap \overline{A - B} = B - A$$

1192. (**Asociatividad en la diferencia de conjuntos**) Verificar con un caso particular, si se cumple la siguiente propiedad para A, B y C subconjuntos de un universo U:

$$(A - B) - C = A - (B - C)$$

Resolución

Sea $U = \{1,2,3,4,5\}$ y los subconjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ y $C = \{3,4,5\}$.

Primero calculamos $A - (B - C)$:

$$\{1,2,3\} - \{2\} = \{1,3\}$$

Ahora calculamos $(A - B) - C$:

$$\{1\} - \{3,4,5\} = \{1\}$$

Los conjuntos $A - (B - C) = \{1,3\}$ y $(A - B) - C = \{1\}$ son distintos.

Respuesta
No se cumple la propiedad para todos los conjuntos.

1193. Probar la siguiente igualdad de conjuntos:

$$(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

Resolución

En el lado izquierdo de la igualdad, notamos que

$$(A - B) \cup (B - A) = A \triangle B$$

Luego: $[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B) = (A \triangle B) \cup (A \cap B)$

$$= [(A \cup B) - (A \cap B)] \cup (A \cap B)$$

$$= A \cup B$$

Respuesta
Queda probada la igualdad de conjuntos.

1194. Verificar la siguiente igualdad de conjuntos:

$$(A \cup B) - A = B - A$$

donde A, B son subconjuntos de un universo U.

Resolución

Del lado izquierdo de la igualdad, tenemos:

$(A \cup B) - A = (A \cup B) \cap \bar{A}$

por propiedad de la diferencia y el complemento,

$$= (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A})$$

por propiedad distributiva,

$$= \emptyset \cup (B \cap \bar{A})$$

$$= B \cap \bar{A} = B - A$$

Respuesta
Se verifica la igualdad $(A \cup B) - A = B - A$.

1195. Sabiendo que para A, B y C conjuntos, $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = C$, mostrar que $C - B = A$.

Datos

$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = C$

Resolución

Como $A \cap B = \emptyset$:

$$(A \cap B) \cup \bar{B} = \emptyset \cup \bar{B}$$

de modo que $A \cup \bar{B} = \bar{B}$.

Luego $C - B = C \cap \bar{B} = (A \cup B) \cap \bar{B}$

$$= A \cap \bar{B}$$

$$= A \cap (A \cup \bar{B})$$

y por absorción,

$$= A$$

Respuesta

Se verifica la igualdad $C - B = A$.

1196. Probar que:

$$n(A \triangle B) = n(A) + n(B) - 2 \cdot n(A \cap B)$$

para A, B subconjuntos finitos de U.

Resolución

Sabiendo que $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$, entonces

$$n(A \triangle B) = n[(A - B) \cup (B - A)]$$

Calculando la cardinalidad de la unión:

$$n[(A - B) \cup (B - A)] = n(A - B) + n(B - A) + n[(A - B) \cap (B - A)]$$

Como $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$, entonces $n[(A - B) \cap (B - A)] = 0$, luego

$$n[(A - B) \cup (B - A)] = n(A - B) + n(B - A)$$
$$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 2 \cdot n(A \cap B)$$

Respuesta

De este modo se demuestra que:

$$n(A \triangle B) = n(A) + n(B) - 2 \cdot n(A \cap B)$$

1197. Sean A, B subconjuntos de un universo U. Sabiendo $n(A \triangle B) = 12$ y $n(A \cup B) = 27$, calcular $n(A \cap B)$.

Datos

$n(A \triangle B) = 12$

$n(A \cup B) = 27$

Resolución

De los datos:

$12 = n(A \triangle B) = n(A) + n(B) - 2 \cdot n(A \cap B) \ldots (1)$

y también $27 = n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \ldots (2)$

Multiplicando por -1 la ecuación (1) y sumando el resultado con la ecuación (2) tenemos:

$$-12 = -n(A) - n(B) + 2 \cdot n(A \cap B)$$

$$27 = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$15 = n(A \cap B)$$

Respuesta

$n(A \cap B) = 15.$

1198. Si $n(\overline{A \cup B}) = 2, n(A) = 15, n(B) = 3, n(A \cap \bar{B}) = 15$
Calcular: $n[(A \cup B) \cup \overline{A \cup B}]$

Datos

$n(\overline{A \cup B}) = 2$

$n(A) = 15$

$n(A \cap \bar{B}) = 15$

Resolución

De la cardinalidad de la unión y reemplazando datos:

$$\begin{aligned} & n[(A \cup B) \cup \overline{A \cup B}] \\ & = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B}) - n[(A \cup B) \cap \overline{A \cup B}] \\ & = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B}) = n(A \cup B) + 2 \end{aligned}$$

pues $(A \cup B) \cap \overline{A \cup B} = \emptyset$.

También $15 = n(A \cap \bar{B}) = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$, de este modo:

$$n(A \cap B) = 15 - 15 = 0$$

Además $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 3 = 18$

Así $n[(A \cup B) \cup \overline{A \cup B}] = 18 + 2 = 20$

Respuesta

$n[(A \cup B) \cup \overline{A \cup B}] = 20$

1199. Si $n(A\cup B)=12,\ n(A\cap B)=1, n(A-B)=4$, ¿cuántos elementos tiene el conjunto $(A\triangle B)\cap\overline{A-B}$?

Datos

$n(A\cup B)=12$

$n(A\cap B)=1$

$n(A-B)=4$

Incógnita:

$n[(A\triangle B)\cap\overline{A-B}]$

Resolución

Del ejercicio 41, tenemos que

$$(A\triangle B)\cap\overline{A-B}=B-A$$

Así, solo se necesita calcular $n(B-A)$. De los datos

$$\begin{aligned}12=n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=n(A)+n(B)-1\ \ldots(1)\end{aligned}$$

y además: $4=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=n(A)-1$

Luego $n(A)=5$ y reemplazando en (1), tenemos $n(B)=8$.

Así $n(B-A)=8-1=7$

Respuesta

$$n[(A\triangle B)\cap\overline{A-B}]=7$$

1200. Sean A, B, C subconjuntos de un universo U. Verifique la siguiente propiedad de la cardinalidad:

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)\\-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Resolución

Por la asociatividad y la cardinalidad de la unión:

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)&=n[(A\cup B)\cup C]\\&=n(A\cup B)+n(C)-n[(A\cup B)\cap C]\\&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-\{n[(A\cap C)\cup(B\cap C)]\}\\&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)\\&\quad-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap C\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Conmutando y asociando términos:

$n(A\cup B\cup C)=$

$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

Respuesta

Se verifica la igualdad.

Tablas de verdad

1201. José tiene la siguiente lista de oraciones y frases, ¿cuántas de ellas no son proposiciones?

- "El cielo es azul"
- "Hoy es lunes"
- "¿Cuál es tu nombre?"
- "Por favor, cierra la puerta"
- "Abel es abogado"
- "El equipo de voleibol no llegó a ganar"
- "¡Qué hermoso día!
- "Deberíamos salir esta noche…"
- "La secundaria está lejos de terminar"
- "La vida es bella!"

a) Tres b) Cuatro c) Cinco d) Ninguna

Respuesta: .....

1202. ¿Cuál es el valor de verdad para el siguiente enunciado?

"No es verdad que si $3+3=6$, implica que $1+1=0$ o $1-1=2$"

a) V b) F c) V y F d) Ninguna

Respuesta: .....

1203. Construya una tabla de verdad de la siguiente proposición:

$$(\sim q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\sim q \wedge \sim r)$$

para saber los valores de verdad cuando $q \equiv F, r \equiv V$ y $q \equiv V$ y $r \equiv F$.

a) V b) F c) V y F d) Ninguna

Respuesta: .....

1204. ¿Cuál es el valor de verdad de la siguiente proposición?

$$(\sim p \wedge p) \Rightarrow (A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \cdots \Rightarrow Z)$$

a) F b) F y V c) V d) Ninguna

Respuesta: .....

1205. Determinar utilizando tablas de verdad si la siguiente proposición es una tautología, contradicción o contingencia:

$$[p \Longrightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)]$$

a) Contradicción b) Contingencia c) Tautología d) Ninguno

Respuesta: .....

1206. Elaborar la tabla de verdad de la siguiente proposición:

$$\sim (p \wedge \sim q)$$

¿Para cuál de las siguientes proposiciónes existe una equivalencia lógica?

a) $p \wedge q$ b) $p \vee q$ c) $p \Leftrightarrow q$ d) $p \Rightarrow q$

Respuesta: .....

1207. Sean $p_0, p_1, \cdots, p_{50}$ proposiciones simples, ¿cuántos renglones o filas tendrá su respectiva tabla de verdad?

a) 2^{51} b) 2^{48} c) 2^{50} d) 2^{49}

Respuesta: .....

1208. Para la siguiente proposición simple:

"Esta afirmación es falsa"

¿Cuál es su valor de verdad?

a) V b) F c) Ambos d) Ninguna

Respuesta: .....

Álgebra de proposiciones

1209. Simplificar la siguiente proposición compuesta:

$$\sim[\sim(r \wedge s) \vee t] \wedge s$$

a) r b) s c) $t \vee (r \wedge s)$ d) $s \vee (r \wedge t)$

Respuesta: .....

1210. Al simplificar $N \equiv (\sim q \Rightarrow p) \vee (p \vee q)$, ¿qué proposición equivalente obtenemos?

a) $N \equiv p$ b) $N \equiv q$ c) $N \equiv p \vee q$ d) $N \equiv (\sim q \Rightarrow p)$

Respuesta: .....

1211. Encontrar una proposición equivalente a la siguiente:

$$[(\sim r \wedge \sim s) \vee (r \vee s)] \wedge \{r \vee [s \wedge (\sim t \vee \sim r)]\}$$

a) $r \vee [s \wedge (\sim t \vee \sim r)]$ b) V c) F d) Ninguno

Respuesta: .....

1212. La siguiente proposición:

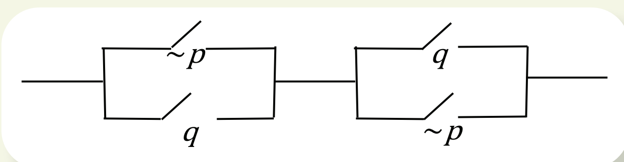
$$p \wedge \{[p \wedge (q \Rightarrow p)] \vee \sim p\}$$

simplificada es equivalente a:

a) q b) p c) $q \Rightarrow p$ d) $\sim p$

Respuesta: .....

1213. Encuentre la proposición que caracteriza al circuito:



a) $p \Leftrightarrow q$ b) $p \wedge q$ c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ d) a) y c)

Respuesta: .....

1214. ¿Para cuál proposición x se cumple la equivalencia?

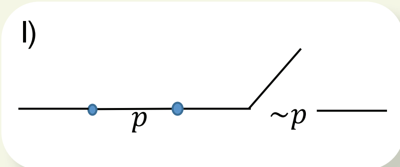
$$\sim x \Rightarrow [(p \Rightarrow x) \wedge (\sim x \Rightarrow p)] \equiv p$$

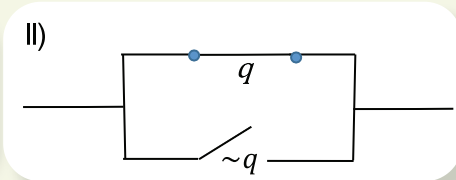
a) $x \equiv \sim p$ b) x puede ser cualquier proposición c) $x \equiv p$

d) Ninguno

Respuesta: .....

1215. ¿Cuál es el valor de verdad de los siguientes circuitos:





a) I: F, II:F b) I: F, II:V c) I: V, II:F d) I: V, II:V

Respuesta: .....

1216. Sabiendo que $(p \wedge \sim r) \Rightarrow r$ es verdadera, ¿cuáles son los valores de verdad de p y r?

a) $p \equiv F$ y $r \equiv F$ b) $p \equiv F$ y $r \equiv V$ c) $p \equiv V$ y $r \equiv F$ d) Ninguno

Respuesta: .....

Conjuntos por comprensión y por extensión

1217. Sea $A = \{n \,/\, n \in \mathbb{N} \wedge (1 \leq n \leq 100)\}$, ¿cuál es el resultado de sumar los elementos de A?

a) 5060 b) 5050 c) 6060 d) 6050

Respuesta: .....

1218. Sea $B = \{3 \cdot n \,/\, n \in \mathbb{N} \wedge (1 \leq n \leq 50)\}$ el conjunto de los múltiplos de 3, ¿cuál es el resultado al sumar los elementos de A?

a) 3852 b) 3828 c) 3825 d) 3500

Respuesta: .....

1219. Sea $C = \{a \cdot b/a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \wedge \left(a \in \{2,4\} \wedge b \in \{6,7\}\right\}$, ¿cuántos elementos tiene este conjunto?

a) 8 b) 6 c) 16 d) 4

Respuesta: .....

1220. Sea $C = \{a \cdot b / a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \wedge (a \in \{2{,}4\} \wedge b \in \{6{,}7\}\}$ ¿cuántos elementos tiene el conjunto?

a) 28 b) 4 c) 2 d) 1

Respuesta: .....

1221. Si $A = \{a, t, m, e, i, c, s\}$, $B = \{m, a, t, e, m, a, t, i, c, a, s\}$ y $C = \{m, t, c, i, s, a, e\}$, ¿qué se puede afirmar de los conjuntos en cuestión?

a) Son iguales b) solo $A \subset B$ c) solo $C \subset B$ d) Ninguno

Respuesta: .....

1222. Hallar el valor de $n(A)$, donde $A = \left\{\frac{s^3+3}{3} / s \in \mathbb{N} \wedge s \neq 0 \wedge s \leq 5\right\}$.

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

Respuesta: .....

1223. ¿Cuál es el valor de $n(A)$, cuando $A = \{s / s \in \mathbb{N} \wedge 0 < s < 1\}$?

a) 1 b) 0 c) Infinitos valores d) Ninguno

Respuesta: .....

1224. Si $B = \{2^y, 32\}$ es un conjunto unitario, ¿cuál es el valor de y?

a) 2 b) 4 c) 5 d) 32

Respuesta: .....

Relaciones entre conjuntos

1225. Sea $\mathbb{N}$ el universo de discurso y $2\mathbb{N}$ el subconjunto de los números pares, A el subconjunto de los divisores de 8 y B el subconjunto de los divisores de 32, ¿cuál es la combinación de valores de verdad correcta para las siguientes afirmaciones?

I) $A \subset B$ II) $\bar{B} \subset \bar{A}$ III) $\emptyset \subset \bar{B}$ IV) $2\mathbb{N} \subset A$

a) $VFVF$ b) $VVFF$ c) $VVVF$ d) $FVFV$

Respuesta: .....

1226. Sea $U = \mathbb{N}$ el conjunto universo y $E = \{5,6,7\}$, $F = \{6,7,8\}$,

$G = \{x/x$ es un número par menor que $10\}$ y $H = \{2,4,6\}$.
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas?

I) $F \neq E$

II) $G \subset H$

a) I) es F y II) es V b) I) es V y II) es F c) Ambas d) Ninguna

Respuesta: .....

1227. ¿Cuál es la combinación de valores de verdad de los siguientes enunciados?

I) Si $A = \{2,4,3,1\}$ y $B = \{4,2,3\}$ entonces $B \subset A$.

II) Para $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b\}$; sí $A = B$, entonces $B \neq A$.

a) VF b) FV c) VV d) FF

Respuesta: .....

1228. ¿Son iguales los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$?

I) $I = \{2,4,6,8\}$ y $J = \{8,6,4,2\}$.

II) $M = \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$ y $P = \{x/x$ es un número impar menor que $20\}$.

a) I) $I = J$ y II) $M = P$ b) I) I) $I \neq J$ y II) $M = P$ c) I) $I = J$ y II) $M \neq P$

d) I) $I \neq J$ y II) $M \neq P$

Respuesta: .....

1229. Dado el conjunto universo $\mathbb{Z}$ de los números enteros y los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$A = \{2 \cdot k + 5/k \in \mathbb{Z}\} \text{ y } B = \{1 + 2 \cdot s/s \in \mathbb{Z}\}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para A y B?

a) $A \subset B$ b) $B \subset A$ c) $A = B$

d) Todas las anteriores

Respuesta: .....

1230. Considere $U = \{10,20,30,40,50,60,70,80,90,100\}$ el conjunto universal y $A = \{n \backslash n \in U \wedge \frac{n}{10}$ es primo$\}$ subconjunto de U, ¿cuál es el complemento de A?

a) $\bar{A} = \{10,30,50,70,90\}$ b) $\bar{A} = \{20,30,50,70,90\}$

c) $\bar{A} = \{40,60,80,90,100\}$ d) Ambas son falsas

Respuesta: .....

Propuestos 05

1231. Una biblioteca tiene tres revistas con tres tópicos diferentes en ciencia, tecnología y salud. Si el lector solo expresa interés en dos tópicos, ¿cuáles son las opciones en la elección de sus tópicos de interés?

a) 3 b) 2 c) 4 d) 5

Respuesta: .....

1232. Debido a su agenda apretada, Melisa no puede inscribirse a las 4 materias este semestre: Cálculo, Álgebra, Geometría e Inglés. Si ella decide tomar al menos una materia, ¿cuántas opciones tiene?

a) 16 b) 13 c) 14 d) 15

Respuesta: .....

Operaciones entre conjuntos

1233. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ el universo de discurso. Si $A=\{4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{6,7,8\}$ son subconjuntos de U y $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, determine la suma de las cardinalidades de los conjuntos $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$.

a) 15 b) 16 c) 14 d) 17

Respuesta: .....

1234. Si $U = \{a, 1, b, 2, c, 3, d, 4, e, 5\}$ y $A = \{1,2,3\}$, B=$\{a, b, c, d, e\}$ y $C = \{3, 4, 5\}$ son subconjuntos de U, determine los siguientes subconjuntos:

I) $A \cup B \cup C$ II) $A \cap B \cap C$ III) $A \triangle B$

a) I) U; II) $\{3\}$; III) $A \cup B$
b) I) U; II) $\emptyset$; III) $\{a, b, c, d, e\}$
c) I) $\{1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5\}$; II) $\emptyset$; III) $A \cup B$
d) Ninguno

Respuesta: .....

1235. Determine los conjuntos $[(A \triangle \bar{B}) \cap \bar{A}]$ y $[\overline{A \cap B} \cap \bar{A}]$ sabiendo que $U=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $A = \{c, d, g, i\}$ y $B=\{a, e\}$.

a) $[\overline{A \cap B} \cap \bar{A}] = \{b, h\}$ y $[(A \triangle \bar{B}) \cap \bar{A}] = \{a, b, e, f, h\}$

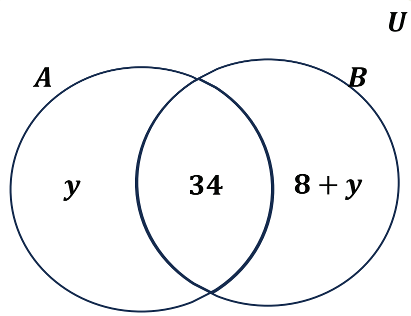
b) $[\overline{A \cap B} \cap \bar{A}] = \{a, b, e, f, h\}$ y $[(A \triangle \bar{B}) \cap \bar{A}] = \{b, h\}$

c) $[\overline{A \cap B} \cap \bar{A}] = \emptyset$ y $[(A \triangle \bar{B}) \cap \bar{A}] = U$

d) Ninguno

Respuesta: .....

1236. En el siguiente diagrama de Venn, los números representan la cardinalidad de los conjuntos. Encontrar el valor de y de modo que $n(A \cup B) = 80$.



a) $y = 16$ b) $y = 15$ c) $y = 14$ d) Ninguno

Respuesta: .....

1237. Si A-$B = \{3,9\}$ y $B - A=\{2, 5, 7\}$ y $A \cap B = \{1, 4, 8\}$, determine los conjuntos A y B.

a) $A = \{3,9\}$ y $B = \{1,2,4,5,7,8\}$

b) $A = \{1,3,4,8,9\}$ y $B = \{2,5,7\}$

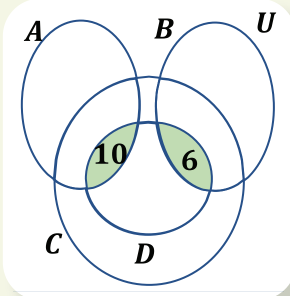
c) $A = \{1,3,4,8,9\}$ y $B = \{1,2,4,5,7,8\}$

d) Ninguno

Respuesta: .....

Propuestos 05

1238. ¿Qué conjunto representa el diagrama de Venn y cuál es su cardinalidad?



a) $A \cap B$ y $n(A \cap B) = 16$
b) $(A \cap D) \cup (B \cap D)$ y $n[(A \cap D) \cup (B \cap D)] = 16$
c) $(C - D) \cup (B - D)$ y $n[(C - D) \cup (B - D)] = 10$
d) $(A \cap D) \cup (B \cap D)$ y $n[(A \cap D) \cup (B \cap D)] = 4$

Respuesta: .....

1239. En una reunión de 100 personas, 40 mencionaron que sólo trabajaban, 50 que no estudiaban y 40 que no trabajaban, ¿cuántas personas estudian y trabajan?

a) 20 b) 20 c) 13 d) Ninguno

Respuesta: .....

1240. En un evento académico, hubo un total de 100 participantes, de los cuales 50 tenían computadoras portátiles, 30 tenían tabletas y 20 tenían ambos dispositivos, ¿cuántos estudiantes tenían al menos uno de los dispositivos?

a) 30 b) 70 c) 50 d) 60

Respuesta: .....

Álgebra de conjuntos

1241. Simplificando el conjunto

$$(\bar{A} - \bar{B}) \cup [B - (B - A)]$$

obtenemos:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $B - A$

Respuesta: .....

1242. Simplificando el conjunto

$$[(\bar{A} \cup B) - A] \cap (A \cup B)$$

obtenemos:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $B - A$

Respuesta: .....

1243. Sabiendo que $A \cup B = U$ y $A \cap B = \emptyset$, el complemento de A es:

a) B b) $\bar{B}$ c) $A \cup B$ d) $A \cap B$

Respuesta: .....

1244. ¿Es cierta la siguiente proposición para todos los conjuntos A, B y C?

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$$

a) Si es cierto b) En ningún caso es cierto

c) Es cierto para algunos casos d) Es falso para todos los casos

Respuesta: .....

1245. Simplificar el siguiente conjunto:

$$\overline{\left[\left(A - (B - \bar{B})\right) \cup A\right]} - (A - B)$$

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \cup \bar{B}$ d) $\bar{A} \cap B$

Respuesta: .....

1246. Una empresa telefónica cuenta con 150 empleados que hablan inglés o español. Sabiendo que 55 hablan inglés y 25 son bilingües, ¿cuántos de ellos sólo hablan español?

a) 220 b) 120 c) 60 d) 110

Respuesta: .....

1247. Un estudio en una empresa respecto a sus empleados, encontró que:

a) 277 tenían casa propia, 233 automóvil y 405 conexión a internet.
b) 165 automóvil e internet, 120 automóvil y casa, 190 casa e internet.
c) 105 tenían casa, auto y conexión a internet.

¿Cuántas personas fueron encuestadas?

a) 544 b) 455 c) 545 d) 645

Respuesta: .....

1248. Si $C \cup D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $C - D = \{a, d, f, h\}$ y $D - C = \{b, e, i\}$, ¿cuántos elementos tiene $C \cap D$?

a) 2 b) 3 c) 0 d) 1

Respuesta: .....

1249. En una conferencia, 60 personas asistieron a la charla de la mañana y 35 a la charla de la tarde. Si 30 personas asistieron a ambas charlas, ¿cuántas personas asistieron al menos a una de las dos charlas?

a) 50 b) 55 c) 60 d) 65

Respuesta: .....

1250. En una escuela, 80 estudiantes practican disciplinas deportivas: atletismo, natación y salto largo. Se sabe que:

– 30 estudiantes practican atletismo.
– 25 estudiantes practican natación.
– 20 estudiantes practican salto largo.
– 10 estudiantes practican atletismo y natación.
– 8 estudiantes practican atletismo y salto largo.
– 5 estudiantes practican natación y salto largo.
– 3 estudiantes practican las 3 disciplinas.

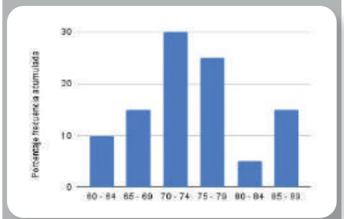
¿Cuántos estudiantes practican al menos una disciplina deportiva?

a) 55 b) 45 c) 35 d) 65

Respuesta: .....

ESTADÍSTICA Y MATEMÁTICA FINANCIERA

Recolección y organización de datos



1

El estudio de la estadística, comienza a partir de la recolección de **datos (agrupados y no agrupados)** vía instrumentos de recopilación como **cuestionarios, entrevistas, información documental**, etc. para su posterior organización (**población y muestra**), análisis (**tabla de distribución de frecuencias**) e interpretación (**medidas de tendencia central y dispersión**) con el fin de tomar decisiones importantes.

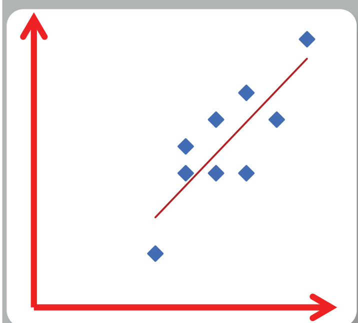
Muchas veces al observar los datos, se notan tendencias, entre ellos, a agruparse a un solo valor. Estos se denominan parámetros de centralización y los más frecuentes y utilizados son la **media aritmética, la mediana y la moda**.

2

Medidas de tendencia central

$$\frac{\sum x_i}{n}$$

Medidas de dispersión y regresión lineal



3

Otra de las tendencias que se observan en los datos es la dispersión, que indica si estos están más o menos cercanos a los parámetros centrales. Los más conocidos y utilizados son el **recorrido** (o **rango**), la **varianza**, y la **desviación típica**.

La **regresión lineal** es muy frecuente al empezar a estudiar la correlación entre dos o más variables, utilizando indicadores como la **covarianza,** para hacer estimaciones en base a los datos, utilizando **rectas de regresión**.

Sustentadas en los conceptos de progresiones matemáticas, las operaciones financieras se fundamentan en la adquisición de bienes, pago de servicios y obtención de rentabilidad.

La matemática financiera se encarga de proporcionar modelos para diferentes situaciones reales como préstamos, créditos o depósitos.

4

Matemática financiera

Usos y aplicaciones en la vida cotidiana

Los conceptos de población y muestra acompañan diariamente nuestras vidas, los medios de comunicación (reportajes, encuestas electorales), las redes sociales, el censo nacional de población y vivienda, entre otros.

Fuente: Instituto Nacional de Estadística

Fuente: Embajada de Bolivia en España

Incluso en el contexto social, el promedio aparece constantemente, desde conversaciones como el promedio de uso de redes sociales hasta en asuntos serios como criterios de selección al postular a universidades e instituciones.

Las medidas de dispersión se utilizan en el mundo empresarial como indicadores de riesgo en inversiones.

Fuente: Fuente: Pil Andina-Productos

Fuente: Agencia boliviana de Información

En deportes, la regresión lineal se emplea para estudiar el efecto de distintos sistemas de entrenamientos en el rendimiento de un deportista.

La matemática financiera es esencial en operaciones bancarias como depósitos, préstamos, entre otros así como la predicción de inversiones en plazos de tiempo cortos y largos.

Fuente: El Diario

Recolección, organización de datos y tipos de variables

1251. La tarea de Juan consiste en dar 3 ejemplos de población. Su contexto o entorno donde vive es un barrio de la ciudad de La Paz.

Datos

Un grupo de personas.

Fuente: Agencia Boliviana de Información

Perros andando por la calle.

Fuente: Agencia Boliviana de Información

Transporte público.

Fuente: Eju Noticias

Respuestas

Población: Todas las personas que habitan en su barrio.

Población: Todos los perros; callejeros o no, que habitan en su barrio.

Población: Todas las personas que utilizan dicho servicio a diario.

1252. El hogar de Maritza se encuentra en un pueblo alejado, de donde debe extraer una muestra de las siguientes poblaciones:

- Las personas que habitan en su pueblo.
- Los ingresos económicos de las (los) jefas (jefes) del hogar.
- La producción agropecuaria.

Datos

Población 1: Las personas que habitan en su pueblo.

Fuente: de tobas y antropologías.

Población 2: Los ingresos económicos de las (los) jefas (jefes) del hogar.

Fuente: presentación en línea

Población 3: La producción agropecuaria.

Fuente: EjuNoticias

Respuestas

Muestra 1: Pobladores que saben leer y escribir.

Muestra 2: Pobladores que ganan menos de 20 bolivianos al día.

Muestra 3: Productores de ganado bovino de la región.

1253. Para cierta zona popular de la ciudad, se toma la siguiente muestra de población:
"60 vehículos de servicio de transporte público, cuyos conductores pertenecen a la línea B".
Identifique dos variables y clasifíquelas según su tipo.

Respuestas

Variable Cualitativa:
La placa del automóvil es un código único, por tanto es del tipo nominal.

Fuente: El Diario

Variable Cuantitativa:
La capacidad del tanque de combustible es del tipo continuo (5,5 L, 8,7 L, etc).

Fuente: Eju Noticias

1254. En cierta zona Z de la ciudad, considere la siguiente población:
– Todos los canes con carnet de vacunación (al menos una vez vacunados), que habitan en el Manzano X, en la zona A.
Identifique dos variables y clasifíquelas según su tipo.

Resolución

Muestra: Diez canes con carnet de vacunación (al menos una vez vacunados) que habitan en la manzana X, en la zona A.

Respuestas

Variable Cualitativa:
El sexo del can, que es del tipo nominal, pues expresa un atributo, que no es medible.

Variable Cuantitativa:
La edad del can, que es del tipo discreto, pues se expresa su edad en cantidad (años).

1255. Andrea tira un dado 18 veces y anota los resultados:

$$4, 2, 6, 1, 3, 5, 2, 6, 4, 1, 3, 5, 6, 4, 2, 1, 5, 3$$

Identifique una muestra de 7 elementos bajo el siguiente criterio: "Todos los resultados del lanzamiento que sean pares".
Describa el tipo de variable que representa a cada lanzamiento de la muestra.

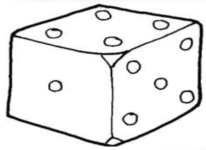
Datos

Población: $4, 2, 6, 1, 3, 5, 2, 6, 4, 1, 3, 5, 6, 4, 2, 1, 5, 3$

Dato Importante
Números pares:
$2, 4, 6, \dots, 2k.$

Resolución

La muestra está constituida por los lanzamientos, cuyos resultados son:

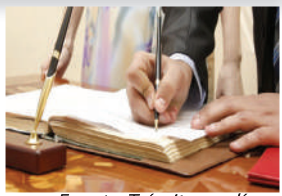


$$4, 2, 6, 2, 6, 4, 6, 4, 2$$

Respuesta
Los datos obtenidos por muestreo, son del tipo discreto. Por tanto, la variable es cuantitativa.

1256. En una pregunta de repaso, Ana debe responder si es posible ordenar a un grupo de personas por su estado civil.

Resolución


Fuente: Trámites en línea.

Se identifica la variable "estado civil" toma valores de tipo atributo:
"soltera (o), casada (o), divorciada (o), viuda (o)"
La variable es cualitativa, con datos de tipo nominal.

Respuesta
No es posible ordenar numéricamente a un grupo de personas por su estado civil.

1257. Los estudiantes del sexto curso de una U.E. , recolectaron datos de sus compañeros, utilizando una ficha como la siguiente:

Inicial del apellido paterno:………………................................... N° de lista:……………………................
Mes de nacimiento:…………………………………………………………………………….
Edad:………………………….. Sexo:…………………………………………………...
Estatura:…………………cm. Peso:………………………………….kg.
N° de hermanos en el colegio:………………………………………………………………
Color favorito:……………………………………………………………………………..
Signo Zodiacal:………………………………………………………………………………

¿Qué se toma por población y muestra?
Además, se pide agregar tres características más y clasificar las mismas como valores.

Resolución

Se añadirán 3 características más a la ficha a continuación:

Inicial del apellido paterno:.. N° de lista:...
Mes de nacimiento:.. CI:..
Edad:.............................. Sexo:..
Estatura:....................cm. Peso:......................................kg.
N° de hermanos en el colegio:...
Color favorito:...
Signo Zodiacal:...
Tiempo de llegada al colegio:..
Número de celular:...

Se procede a clasificar las características recién añadidas en la siguiente tabla:

Variables	Características	Valores
Cualitativas	CI (Cédula de identidad) Número de celular	845575,545464, etc. 6124878,7884852, etc
Cuantitativas Discretas	Tiempo de llegada al colegio	1 hora, 2 horas, 15 minutos, etc.

Respuestas

Se identifica la población de estudio como el número de estudiantes en el colegio.
Se identifica a la muestra como el número de estudiantes del sexto curso del colegio.

1258. Al acceder al sitio web de una cinemateca, aparecía un formulario que pedía al usuario introducir información personal sobre:

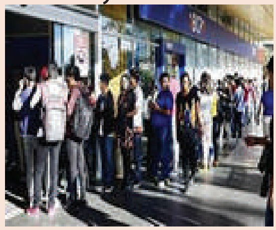
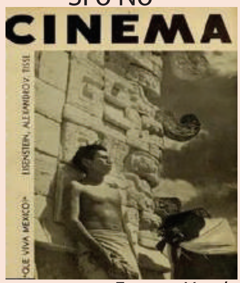
a) Centro de procedencia.
b) Frecuencia con la que va al cine en un mes.
c) ¿Tiene una enciclopedia sobre cine en casa?

Clasificar estas variables según su tipo.

Resolución

A continuación, se procede a clasificar las variables:

Variables	Características	Valores
Cualitativas	Centro de procedencia	Centros de educación, colegios, etc. 

Cualitativas	¿Con qué frecuencia va al cine en un mes?	"nada", "poco", "más o menos" y "mucho"  *Fuente: Los Tiempos*
	¿Tiene alguna revista de cine en casa?	Sí o No  *Fuente: Yandex*

Respuestas

a) El centro de procedencia es una variable cualitativa de tipo nominal (sus valores son atributos).

b) El número de horas que frecuenta el cine es una variable cuantitativa de tipo discreto (las horas que frecuenta el cine se pueden contar con números naturales).

c) La frecuencia con la que alguien va al cine en un mes es una variable cualitativa de tipo ordinal (puede tomar valores de "nada", "poco", "más o menos" y "mucho", los cuales presentan una cierta jerarquía).

1259. De 80 personas se ha realizado un estudio con 30 de ellas, cuyos resultados se detallan en la siguiente tabla:

a) ¿Qué características se investiga en el estudio?

b) ¿Qué tipo de variable se puede medir? ¿por qué?

c) Describir la población.

d) Describir la muestra.

POSTULANTE	Nro. de Personas
CANDIDATO A	11
CANDIDATO B	7
CANDIDATO C	4
NINGUNO	8

Respuestas

a) Se investiga las preferencias 30 de personas por algún candidato.
b) La variable "Nro. de personas" es cuantitativa del tipo discreto, pues toma valores enteros; por ejemplo para "CANDIDATO A" tenemos 11 personas.
c) La población la conforman 80 personas.
d) La muestra la conforman las 30 personas del estudio.

1260. Anabel antes de realizar una encuesta, debe clasificar los siguientes caracteres en cualitativos, cuantitativos, cuantitativos discretos o cuantitativos continuos.

a) El color de ojos.
b) La presión arterial de un grupo de personas.
c) El artista musical preferido.
d) El número de veces que viajó al exterior del país.

Respuesta

Se muestra la siguiente tabla, las cuales contienen la clasificación de las variables:

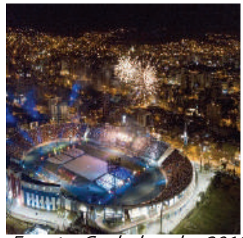
Variables		**Características**
Cualitativas		El color de ojos
		El artista musical preferido.
Cuantitativas	Discretas	El número de veces que viajó al exterior del país.
	Continuas	La presión arterial de un grupo de personas.

1261. Cierto evento deportivo durante un mes recibió alrededor de 10 000 visitantes. Gabriel que estuvo presente, debe elaborar una tabla con la información del evento, pero antes de empezar necesita decidir bajo qué circunstancias los 10 000 visitantes pueden considerarse como:

a) Población
b) Muestra

Respuestas

a) Se toma por ejemplo la siguiente circunstancia: el boleto de admisión al evento, el cual hace de los 10 000 visitantes la población y a aquellos que no pagan para entrar, la muestra.



Fuente: Cochabamba 2018

b) Se toma por ejemplo la siguiente circunstancia: "Todos los aficionados a eventos deportivos de la ciudad" que se toma como población.

Fuente: Redes

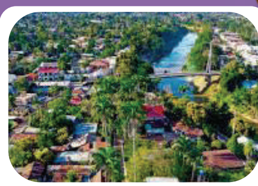
1262. Juana, que trabaja en una empresa impulsora de consultas y encuestas, debe organizar la información obtenida, definiendo antes poblaciones apropiadas y seleccionando de ellas las siguientes muestras:

a) Una consulta en una ciudad recabó información de 300 hogares, acerca de la modificación de un decreto.

b) En una fábrica, se seleccionan aleatoriamente salarios mensuales de 100 obreros.

Respuestas

a) Para la población, se puede seleccionar la ciudad de Cobija, capital del departamento de Pando y seleccionar una muestra de 300 hogares de cada uno de los sectores de la ciudad: residencial, popular, etc.



Fuente: Cámara de Senadores

b) Para la población, se puede considerar una fábrica de textiles y seleccionar una muestra de los salarios de obreros y sus diferentes ocupaciones: manufactura, diseño, ventas, etc.

Fuente: Redes

Básico 01

Tablas de frecuencias (gráficas)

1263. Andrés tira un dado 20 veces y anota los resultados:

1,5,3,2,6,4,1,6,2,3,4,1,5,2,6,3,4,1,6,5.

¿Cuál es la frecuencia absoluta para la cara 2?

Resolución

Se ordenan los datos (que son del tipo entero) en forma creciente, sin obviar a ninguno, de la siguiente manera:

$$\overbrace{1,\ 1,\ 1,\ 1,}\ \underbrace{2,\ 2,\ 2,}\ \overbrace{3,\ 3,\ 3,}\ \underbrace{4,\ 4,\ 4,}\ \overbrace{5,\ 5,\ 5,}\ \underbrace{6,\ 6,\ 6,\ 6.}$$

Dato Importante
n_i:
Frecuencia absoluta del *i*-ésimo dato.

Los datos ordenados x_i, muestran 6 valores diferentes:

1,2,3,4,5,6

correspondientes a las caras del dado, los cuales también ordenamos.

Se observa que salió el resultado "2" un total de 3 veces de los 20 lanzamientos del dado; es decir:

$$n_2 = 3$$

Respuesta

La frecuencia absoluta correspondiente a la cara "2" dado es igual a 3.

1264. Daria tira un dado 25 veces y anota los resultados:

1,5,3,2,6,4,1,6,2,3,4,1,5,2,6,3,4,1,6,5,6,3,2,1,4.

Debe hallar la frecuencia absoluta de todos los datos.

Resolución

Cara del dado	n_i
1	5
2	4
3	4
4	4
5	3
6	5
TOTAL	25

Los datos ya ordenados se presentan así:

1,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,6,6,6,6,6.

Se acomodan estos datos en una tabla, haciendo de la primera columna los datos distintos, que representan a cada una de las seis caras del dado y la segunda columna sus respectivas frecuencias absolutas (ver tabla).

Respuesta

Las frecuencias absolutas de las caras 1,2,3,4,5,6 son 5,4,4,4,3,5; respectivamente.

1265. A 10 estudiantes se les preguntó sobre el número de hermanos en su familia y sus respuestas fueron: 3,4,5,8,3,7,6,4,7,3.
¿Para cuántos estudiantes la frecuencia absoluta es máxima?

Resolución
Se tabulan estos datos de manera creciente: la primera columna con los datos únicos y la segunda columna las frecuencias absolutas:

Hermanos en la familia	n_i
3	3
4	2
5	1
6	1
7	2
8	1
TOTAL	10

Respuesta
Para 3 estudiantes, los cuales tienen 3 hermanas (os) o ambos.

1266. Un empleado de control de fronteras de un aeropuerto nacional, registra el ingreso de 15 turistas. Los visitantes hablan los siguientes idiomas, según sus pasaportes:
"francés, inglés, inglés, español, inglés, español, inglés, español, español, alemán, inglés, francés, ruso, ruso, inglés".
Elabore una tabla de frecuencias absolutas para conocer el idioma más hablado de la muestra.

Resolución

La variable es de tipo cualitativo (si es de tipo nominal, no se ordena).
Se tabula esta muestra con la primera columna indicando la variable y en la segunda columna la frecuencia absoluta (ver tabla).

IDIOMA	n_i
Francés	2
Inglés	6
Español	4
Alemán	1
Ruso	2
TOTAL	15

Respuesta
El valor más alto en la tabla es $n_2 = 6$, que corresponde al idioma inglés, es el más hablado entre los turistas.

1267. Elaborar una tabla de frecuencias absolutas con los pesos en kilogramos, extraídos de una muestra de 14 atletas:

68,68,59,49,58,51,57,53,68,54,56,61,55,68.

Respuesta

Se tabulan los datos de los pesos de menor a mayor a continuación:

Peso x_i (kg)
49
51
53
54
55
56
57
58
59
61
68
68
68
68

Se añade a la tabla anterior una segunda columna que corresponde a las frecuencias absolutas n_i de los datos x_i, de modo que la tabla de frecuencias absolutas final queda así:

Peso x_i (kg)	n_i
49	1
51	1
53	1
54	1
55	1
56	1
57	1
58	1
59	1
61	1
68	4
TOTAL	14

1268. Las calificaciones en un examen de matemática, obtenidas por un grupo de estudiantes son:

74,50,56,90,81,41,56,67,90,60,76,76,91,41

Encuentre el porcentaje de cada frecuencia absoluta, en relación a la cantidad de datos en la muestra.

Datos

n: tamaño de la muestra

$n = 14$

Resolución

Se ordenan los datos de la muestra de menor a mayor:

$$\underbrace{41,41},50,\underbrace{56,56},60,67,74,\underbrace{76,76},81,\underbrace{90,90},91$$

Luego, las respectivas frecuencias absolutas de los datos de la muestra son:

$$n_1 = 2;\ n_2 = 1;\ n_3 = 2;\ n_4 = 1;\ n_5 = 1$$

$$n_6 = 1;\ n_7 = 2;\ n_8 = 1;\ n_9 = 2;\ n_{10} = 1$$

Ahora, sabiendo que $n = 14$ solo queda calcular los porcentajes de las frecuencias absolutas:

$$\%_{n_1} = \frac{n_1}{14} \cdot 100 = 14{,}29\%;\ \%_{n_2} = \frac{n_2}{14} \cdot 100 = 7{,}14\%$$

$$\%_{n_3} = \frac{n_3}{14} \cdot 100 = 14{,}29\%,\ \%_{n_4} = \frac{n_4}{14} \cdot 100 = 7{,}14\%$$

$$\%_{n_5} = \frac{n_5}{14} \cdot 100 = 7{,}14\%;\ \%_{n_6} = \frac{n_6}{14} \cdot 100 = 7{,}14\%$$

$$\%_{n_7} = \frac{n_7}{14} \cdot 100 = 14{,}29\%;\ \%_{n_8} = \frac{n_8}{14} \cdot 100 = 7{,}14\%$$

$$\%_{n_9} = \frac{n_9}{14} \cdot 100 = 14{,}29\%;\ \%_{n_{10}} = \frac{n_{10}}{14} \cdot 100 = 7{,}14\%$$

Respuesta

Los porcentajes de las frecuencias absolutas de las calificaciones de los estudiantes son:

14,29%; 7,14%; 14,29%; 7,14%; 7,14%; 7,14%;
14,29%; 7,14%; 14,29%; 7,14%

Medidas de tendencia central

1269. Yandira necesita calcular el promedio de los siguientes resultados:

4,2,6,1,3,5

que corresponden a su tiempo en horas de estudio diario de lunes a sábado.

Resolución

Se reemplazan los datos en la fórmula de la media aritmética:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum_1^6 x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6}$$

De donde:

$$\bar{X} = \frac{4+2+6+1+3+5}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Datos

n: total de datos
x_i: datos de la muestra

$x_1 = 4,\ x_2 = 2$

$x_3 = 6,\ x_4 = 1$

$x_5 = 3,\ x_6 = 5$

$n = 6$

Incógnita:

$\bar{X}$: Media Aritmética

Respuesta

El promedio es 3,17 horas o aproximadamente 3 horas y 30 minutos semanales.

Básico 01

1270. Un profesor de educación física desea conocer el promedio de los tiempos en segundos de 5 estudiantes en atletismo, con el fin de inscribirlos en una competencia deportiva. Los tiempos son:

8,3 s; 9,8 s; 7,5 s; 7,3 s; 7,7 s

Datos

x_i: Datos de la muestra
x_1=8,3 s, x_2=9,8 s
x_3=7,5 s, x_4=7,3 s
x_5=7,7 s
n=5
Incógnita:
$\bar{X}$

Resolución

Se reemplazan los datos:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum_1^5 x_i}{5} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

De donde:

$$\bar{X} = \frac{8,3 + 9,8 + 7,5 + 7,3 + 7,7}{5} = 8,12$$

Respuesta

El promedio es 8,12 segundos.

1271. Los siguientes números son frecuencias absolutas de una muestra:

1,2,8,4,3,6,8,2.

Hallar el promedio de estas frecuencias.

Datos

x_i: Datos de la muestra
$x_1 = 1$, $x_2 = 2$
$x_3 = 8$, $x_4 = 4$
$x_5 = 3$, $x_6 = 6$
$x_7 = 8$, $x_8 = 2$
$n = 8$
Incógnita:
$\bar{X}$

Resolución

Se reemplazan los datos:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum_1^8 x_i}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8}$$

De donde:

$$\bar{X} = \frac{1 + 2 + 8 + 4 + 3 + 6 + 8 + 2}{8} = 4,25$$

Respuesta

El promedio de las frecuencias absolutas es 4,25

1272. Hallar la mediana de la siguiente muestra con 6 resultados al lanzar 6 veces un dado:

1, 3, 5, 2, 3, 5.

Resolución

Se ordenan los datos de forma creciente:

$$1,2,3,3,4,5$$

Como $n = 6$ es un número par, se buscan los datos intermedios de la muestra ordenada, hallando los valores de $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2}+1$:

$$\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{n}{2}+1 = \frac{6}{2}+1 = 4$$

Se buscan las posiciones 3 y 4 en la muestra ordenada de menor a mayor:

$$1,2,3,3,4,5$$

Se calcula la mediana igual al promedio de esos valores:

$$Me = \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\underbrace{1,\ 2,\ 3,}\ \underbrace{3,\ 4,\ 5}\quad Me$$

Datos

x_i: Datos de la muestra

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

$x_3 = 5$

$x_4 = 2$

$x_5 = 3$

$x_6 = 5$

$n = 6$

Incógnita:

Me: Mediana

Respuesta

La mediana es 3.

1273. Hallar la mediana de la siguiente muestra con 9 resultados al lanzar 6 veces un dado:

$$3,4,5,8,3,7,6,7,3$$

Resolución

Primero se ordenan los datos de menor a mayor:

$$3,3,3,4,5,6,7,7,8$$

Datos

$n = 9$

Incógnita:

Me: Mediana

Hacemos $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6, x_7 = 7, x_8 = 7$ y $x_9 = 8$.

Como n=9 es un número impar, la mediana es:

$$Me = x_{\frac{n+1}{2}} = x_{\frac{9+1}{2}} = x_{\frac{10}{2}} = 5$$

$$\underbrace{3,\ 3,\ 3,\ 4,}\ 5,\ \underbrace{6,\ 7,\ 7,\ 8}$$

Respuesta

La mediana de la muestra es $Me = x_5 = 5$

Básico 01

1274. Karina lee un reporte con las edades en años de 10 personas:
17,19,20,23,23,23,27,32 ,35,40.
Encontrar la media aritmética y la moda correspondiente.

Datos

x_i: Datos de la muestra
$\bar{X}$: Media Aritmética
$x_1 = 17$; $x_2 = 19$
$x_3 = 20$; $x_4 = 23$
$x_5 = 23$; $x_6 = 23$
$x_7 = 27$; $x_8 = 32$
$x_9 = 35$; $x_{10} = 40$
$n = 10$

Incógnitas:
Mo: Moda
$\bar{X}$,Mo

Resolución

Se reemplazan los datos en:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum_1^{10} x_i}{n}$$

$$= \frac{17+19+20+23+23+23+27+32+35+40}{10}$$

$$= 25{,}9$$

El dato que más se repite en la muestra es $x_4 = x_5 = x_6 = 23$.

$$17,19,20,\underbrace{23,23,23}_{Mo},27,32,35,40$$

Respuesta
La media aritmética o el promedio de las edades de la muestra es igual a 25,9 (26 años aproximadamente). La moda es 23 (la edad más frecuente de la muestra es 23 años).

Cuartiles, deciles y percentiles

1275. Sara debe encontrar el primer cuartil de la muestra asociada a la cantidad de electrodomésticos vendidos en 11 meses:
3,5,2,6,5,9,5,2,8,6,7

Datos

n: Total de datos
$°Q_k$: k-ésimo Cuartil
$n = 11$

Incógnita:
$°Q_1$

Resolución

Se ordenan los datos de menor a mayor:
2,2,3,5,5,5,6,6,7,8,9
Hacemos $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 5, x_5 = 5, x_6 = 5,$ $x_7 = 6,\ x_8 = 6,\ x_9 = 7,\ x_{10} = 8$ y $x_{11} = 9$.

Para saber la posición del primer cuartil en la muestra ordenada, hacemos k=1 y reemplazamos en: $\frac{k(n+1)}{4} = \frac{1(11+1)}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Se busca la posición 3 de los datos ordenados, luego:

$$°Q_1 = x_{\frac{k(n+1)}{4}} = x_{\frac{12}{4}} = x_3 = 3$$

$$\underbrace{2,\ 2,\ 3}_{},\ 5,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

Respuesta
El primer cuartil $°Q_1$ es x_3=3.

1276. Manuel obtiene la cotización en bolivianos de 7 productos:

300,500 ,200 ,600 ,500 ,900 ,500

Determinar el costo de los artículos más caros.

Resolución

Se ordenan los precios de menor a mayor:

200,300,500,500,500,600,900

Hacemos $x_1 = 200$, $x_2 = 300$, $x_3 = 500$, $x_4 = 500$, $x_5 = 500$, $x_6 = 600$ y $x_7 = 900$.

Se busca el tercer cuartil $°Q_3$, de modo que para calcular su valor hacemos k=3 y reemplazamos en:

$$\frac{k(n+1)}{4} = \frac{3(7+1)}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

Se busca la posición i=6 en los datos ordenados, luego:

$$°Q_3 = x_{\frac{3(7+1)}{4}} = x_{\frac{24}{4}} = x_6 = 600 \qquad 200, 300, 500, 500, 500, \underbrace{600, 900}$$

Datos

n: Total de datos

Incógnita:

$°Q3$

Respuesta Los precios más altos son 600 bolivianos y 900 bolivianos.

1277. Gabriel concluyó su participación en una feria durante 9 días. Cada día registró la cantidad de visitantes a su puesto:

51,48,50,49,48,79,90,51,80

desde el día 1, hasta el día 9 respectivamente, con el fin de encontrar el sexto decil e interpretar la información.

Resolución

Se ordenan los datos de menor a mayor:

48,48,49,50,51,51,79,80,90

Hacemos $x_1 = 48$, $x_2 = 48$, $x_3 = 49$, $x_4 = 50$, $x_5 = 51$, $x_6 = 51$, $x_7 = 79$, $x_8 = 80$ y $x_9 = 90$.

Datos

n: total de datos

$n = 9$

Incógnita:

$°D_k$: k-ésimo Decil

$°D_6$

Para calcular el valor del sexto decil, hacemos k=6 y reemplazamos en:

$$\frac{k(n+1)}{10} = \frac{6(9+1)}{10} = \frac{60}{10} = 6$$

Se busca la posición i=6 de los datos ordenados, luego:

$$°D_6 = x_{\frac{k(n+1)}{10}} = x_{\frac{60}{10}} = x_6 = 51$$

Respuesta El sexto decil $°D_6$ es igual a 51, es decir, el 60% del número de visitantes está por debajo de 51.

1278. Sabiendo que el séptimo decil de los datos de una muestra es igual a 49, determine el total de datos n que existen en dicha muestra.

Datos

$°D_k$: k-ésimo Decil
$°D_7 = 49$
Incógnita:
n

Resolución

El séptimo decil está asociado a $k = 7$, de modo que, utilizando la fórmula para los deciles tenemos:

$$°D_k = \frac{k(n+1)}{10} = \frac{7(n+1)}{10} \qquad (1)$$

Como el séptimo decil $°D_7$ es igual a 49, la ecuación (1) queda:

$$49 = \frac{7(n+1)}{10} \qquad (2)$$

Se multiplica a la ecuación (2) por 10, de modo que:

$$49 \cdot 10 = \frac{7(n+1)}{10} \cdot 10$$

Quedando:

$$490 = 7(n+1) \qquad (3)$$

Se multiplica a la ecuación (3) por $\frac{1}{7}$, de modo que:

$$\frac{1}{7} \cdot 490 = \frac{490}{7} = \frac{1}{7} \cdot 7(n+1)$$

Quedando:

$$70 = \frac{7}{7} \cdot (n+1) = n+1 \qquad (4)$$

Resolviendo la ecuación (4):

$$n = 69$$

Respuesta
La muestra tiene un total de 69 datos.

1279. Sabiendo que el 73 º percentil de los datos de una muestra es igual a 876, determine el total de datos n que existen en dicha muestra.

Datos

$°P_k$: k-ésimo percentil
$°P_{73} = 876$
Incógnita:
n

Resolución

El 73avo está asociado a $k = 73$, luego:

$$°P_k = \frac{k(n+1)}{100} = \frac{73(n+1)}{100}$$

Como el 73avo percentil $°P_{73}$ es igual a 876, la ecuación (1) queda:

$$876 = \frac{73(n+1)}{100} \qquad (2)$$

Se multiplica a la ecuación (2) por 100, de modo que:

$$876 \cdot 100 = \frac{73(n+1)}{100} \cdot 100$$

Quedando:

$$87600 = 73(n+1) \qquad (3)$$

Se multiplica a la ecuación (3) por $\frac{1}{73}$, de modo que:

$$\frac{87600}{73} = \frac{1}{73} \cdot 73(n+1)$$

Quedando:

$$1200 = \frac{73}{73} \cdot (n+1) = n+1 \quad (4)$$

Y resolviendo la ecuación (4):

$$n = 1199$$

Respuesta

La muestra tiene un total de 1199 datos.

1280. En su trabajo práctico escolar, Germán tiene como tarea hallar los deciles de los siguientes datos que corresponden a los ingresos familiares de las familias de sus compañeros de curso en bolivianos:
2000,2500,2300,2200,2100,2600,2400,2700,2800,2900,3100,3200,
3300,3400,3500,3600,3700,3800,3900.

Resolución

La cantidad de datos de la muestra es $n = 19$.
El primer decil está asociado a $k = 1$, de modo que utilizando la fórmula para los deciles, tenemos:

$$°D_1 = \frac{k(n+1)}{10} = \frac{1 \cdot (19+1)}{10} = 2$$

Así $°D_1 = 2$.
El segundo decil está asociado a k=2, de modo que utilizando la fórmula para los deciles, tenemos:

$$°D_1 = \frac{k(n+1)}{10} = \frac{2 \cdot (19+1)}{10} = \frac{2 \cdot 20}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

Así $°D_2 = 4$.
Del mismo modo procedemos a hallar los resultados para $k = 3, 4, ..., 9$; obteniendo:

$$°D_3 = 6,\ °D_4 = 8,\ °D_5 = 10,\ °D_6 = 12,\ °D_7 = 14,\ °D_8 = 16,\ °D_9 = 18.$$

Básico 01

Ahora, se procede a ordenar los datos de la muestra en forma creciente; es decir:

2000,2100,2200,2300,2400,2500,2600,2700,2800,2900, 3100,3200,3300,3400,3500,3600,3700,3800,3900.

Se deduce que el primer decil $^{\circ}D_1$ es el segundo dato: 2100.
El segundo decil $^{\circ}D_2$ es en el cuarto dato: 2300.
El tercer decil $^{\circ}D_3$ es el sexto dato: 2500.
El cuarto decil $^{\circ}D_4$ es el octavo dato: 2700.
El quinto decil $^{\circ}D_5$ es el décimo dato: 2900.
El sexto decil $^{\circ}D_6$ es el doceavo dato: 3200.
El séptimo decil $^{\circ}D_7$ es el catorceavo dato: 3400.
El octavo decil $^{\circ}D_8$ es el dieciseisavo dato: 3600.
El noveno decil $^{\circ}D_9$ es el dieciochoavo dato: 3900.
Tabulando estos datos tenemos:

$^{\circ}D_1$	$^{\circ}D_2$	$^{\circ}D_3$	$^{\circ}D_4$	$^{\circ}D_5$	$^{\circ}D_6$	$^{\circ}D_7$	$^{\circ}D_8$	$^{\circ}D_9$
2100	2300	2500	2700	2900	3200	3400	3600	3800

Respuesta
Interpretando los datos, los ingresos más bajos están en el primer decil; es decir, ingresos menores a 2100 bolivianos.

Medidas de dispersión

1281. Gabriel necesita hallar la desviación media de sus calificaciones de primero a quinto de secundaria respectivamente:
82 ,88, 84, 78, 90

Resolución

Se calcula la media aritmética:

$$\bar{X} = \frac{82 + 88 + 84 + 78 + 90}{5} = 84{,}4$$

Se calcula la desviación media $D_{\bar{X}}$:

$$D_{\bar{X}} = \frac{|82 - 84{,}4| + |88 - 84{,}4| + |84 - 84{,}4| + |78 - 84{,}4| + |90 - 84{,}4|}{5}$$

$$= \frac{18{,}4}{5} = 3{,}68$$

Respuesta
La desviación media es de 3,68 puntos.

1282. Alexa necesita calcular la desviación media en los datos de la muestra, formada por los primeros 6 números de Fibonacci:

1,1,2,3,5,8

sabiendo que su media aritmética es 3,33.

Resolución

Se calcula la desviación media:

Datos

$\bar{X} = 10$

$$D_{\bar{X}} = \frac{|1-3{,}33| + |1-3{,}33| + |2-3{,}33| + |3-3{,}33| + |5-3{,}33| + |8-3{,}33|}{6} = 2{,}11$$

Respuesta

La desviación media es de 2,11.

1283. Ricardo debe hallar la varianza y la desviación típica de los siguientes datos, que son sus calificaciones de primero a quinto de secundaria respectivamente, sabiendo que su promedio es 84:

89,70,90,83,89

Resolución

Datos

Se calcula la varianza:

$\bar{X} = 84$

$$V = \frac{(89-84)^2 + (70-84)^2 + (90-84)^2 + (83-84)^2 + (89-84)^2}{5} = 56,6$$

Luego se calcula la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{(89-84)^2 + (70-84)^2 + (90-84)^2 + (83-84)^2 + (89-84)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{56{,}6} \approx 7{,}52$$

Respuesta

La varianza es 56,6 y la desviación típica es 7,52 aproximadamente

1284. La base de datos que María acaba de recopilar, está constituida por los primeros 10 números impares y su tarea es hallar la varianza y la desviación típica, sabiendo que su promedio es 10.

Datos

$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$x_3 = 5$
$x_4 = 7$
$x_5 = 9$
$x_6 = 11$
$x_7 = 13$
$x_8 = 15$
$x_9 = 17$
$x_{10} = 19$
$\bar{X} = 10$

Incógnitas:

V, σ

Resolución

Se calcula la varianza:

$$V = \frac{(1-10)^2 + (3-10)^2 + \cdots + (17-10)^2 + (19-10)^2}{10} = 33$$

Luego se calcula la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{33} \approx 5{,}74$$

Respuesta La varianza es 33 y la desviación típica es 5,74 aproximadamente.

1285. Joaquina quiere calcular el coeficiente de variación (CV) de las calificaciones de su curso, sabiendo que el promedio es igual a 150 y su varianza es igual a 30,4.

Datos

$\bar{X} = 150$

$V = 30{,}4$

Incógnita:
CV: Coeficiente de variación

Resolución

Se calcula la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{30{,}4} \approx 5{,}51$$

Luego se calcula el coeficiente de variación de Pearson (CV):

$$CV = \frac{\sigma}{|\bar{X}|} = \frac{5{,}51}{|150|} = \frac{5{,}51}{150} \approx 0{,}037$$

Respuesta El coeficiente de variación es aproximadamente 0,037.

1286. Juan y Pedro son dos atletas dedicados a la prueba de 200 metros planos en velocidad, en cuya práctica registraron sus marcas en segundos. Encontrar las desviaciones típicas y coeficientes de variación respectivos, utilizando la tabla con sus respectivas marcas:

Juan (x_i)	20,3	20,3	20,2	20,3	20,3
Pedro (y_i)	19,4	19,9	19,79	20,3	20,4

Resolución

Previamente, se calcula el promedio de los x_i (los tiempos de Juan):

$$\bar{X}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{\sum_1^5 x_i}{n}=\frac{20{,}3+20{,}3+20{,}2+20{,}3+20{,}3}{5}=20{,}28$$

Se calcula la varianza para x_i (tiempos de Juan):

$$V_{x_i}=\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n}=\frac{4\cdot(20{,}3-20{,}28)^2+(20{,}2-20{,}28)^2}{5}=0{,}0016$$

Luego su desviación típica es:

$$\sigma_{x_i}=\sqrt{V_{x_i}}=\sqrt{0{,}0016}=0{,}04$$

Luego se calcula el coeficiente de variación de Pearson (CV) para Juan:

$$CV_{x_i}=\frac{\sigma_{x_i}}{|\bar{X}|}=\frac{0{,}04}{|20{,}28|}=\frac{0{,}04}{20{,}28}\approx 0{,}00197$$

Ahora calculamos el promedio de los y_i (los tiempos de Pedro):

$$\bar{Y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{\sum_1^5 y_i}{n}=\frac{19{,}4+19{,}9+19{,}79+20{,}3+20{,}4}{5}=19{,}96$$

Se calcula la varianza para y_i (tiempos de Pedro):

$$V_{y_i}=\frac{(19{,}4-19{,}96)^2+(19{,}9-19{,}96)^2+(19{,}79-19{,}96)^2+(20{,}3-19{,}96)^2+(20{,}4-19{,}96)^2}{5}$$

$$=0{,}131$$

De modo que la desviación estándar es:

$$\sigma_{y_i}=\sqrt{V_{y_i}}=\sqrt{0{,}131}=0{,}36$$

Ahora se calcula el coeficiente de variación (CV) para Pedro:

$$CV_{y_i}=\frac{\sigma_{y_i}}{|\bar{Y}|}=\frac{0{,}36}{|19{,}96|}=\frac{0{,}36}{19{,}96}\approx 0{,}018$$

Respuesta

Los resultados para Juan son: $\sigma_{x_i}=0{,}04$ y $CV_{x_i}=0{,}00197$

Los resultados para Pedro son : $\sigma_{y_i}=0{,}36$ y $CV_{y_i}=0{,}018$.

Regresión Lineal

1287. A través de un pesaje a un grupo de 5 estudiantes de entre 8 a 12 años, se obtuvieron los siguientes datos:

Edad	8	9	8	9	12
Peso	40	40	50	45	45

Elabore una tabla de doble entrada que refleje las frecuencias absolutas de las variables.

Resolución

Se identifica la variable "Edad" como la variable independiente x_i.
Se anotan los datos únicos correspondientes a "Edad", ordenados de menor a mayor:

$$x_1 = 8,\ x_2 = 9,\ x_3 = 12 \qquad i = 1, 2, 3;$$

y los anotamos en la primera fila de la tabla:

Edad (x_i)	8	9	12

Pesos (y_i)
40
45
50

Se anotan los datos únicos correspondientes a "Peso", ordenados de menor a mayor:

$$y_1 = 40,\ y_2 = 45,\ y_3 = 50 \qquad i = 1, 2, 3$$

en la primera columna como en la tabla a la izquierda.

Con la ayuda de la tabla de pesos y edades, se calculan las frecuencias absolutas como sigue:

Para la edad de 8 años ($i = 1$), tenemos pesos de 40 y 50:

$$n_{11} = 1,\ n_{31} = 1$$

La primera columna correspondiente a la edad de 8 años queda:

8
$n_{11} = 1$
$n_{31} = 1$

Para la edad de 9 años ($i = 2$), tenemos pesos de 40 y 45:

$$n_{12} = 1,\ n_{22} = 1$$

La segunda columna correspondiente a la edad de 9 años queda:

9
$n_{12} = 1$
$n_{22} = 1$

Para la edad de 12 años ($i = 3$), tenemos solo un peso igual a 45 kilogramos:

$$n_{33} = 1$$

12
$n_{33} = 1$

Respuesta

La tabla de doble entrada final será:

Pesos \ Edad	8	9	12	TOTAL
40	$n_{11}=1$	$n_{12}=1$		2
45		$n_{22}=1$		1
50	$n_{31}=1$		$n_{33}=1$	2
TOTAL	2	2	1	$n=5$

1288. Marcos recopila la cantidad de ejercicios de matemáticas que puede resolver en 5 días, la tabla es:

Días (x_i)	1	2	3	4	5
Cantidad (y_i)	12	10	5	7	6

Hallar la covarianza de estos datos.

Resolución

Se calcula la covarianza tabulando los datos y se procede a calcular los productos entre x_i y y_i. La cantidad de filas en la tabla es $n=5$, los promedios correspondientes a x_i e y_i son $\bar{X}=3$ y $\bar{Y}=8$. La suma de todos los valores de la tercera columna es:

Días (x_i)	Cantidad (y_i)	$x_i \cdot y_i$
1	12	12
2	10	20
3	5	15
4	7	28
5	6	30

$$\sum x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot y_i = 105$$

Reemplazando en la fórmula de la covarianza tenemos:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{n} - \bar{X} \cdot \bar{Y} = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot y_i - \bar{X} \cdot \bar{Y} = \frac{105}{5} - 24 = -3$$

Respuesta

La covarianza σ_{xy} es -3

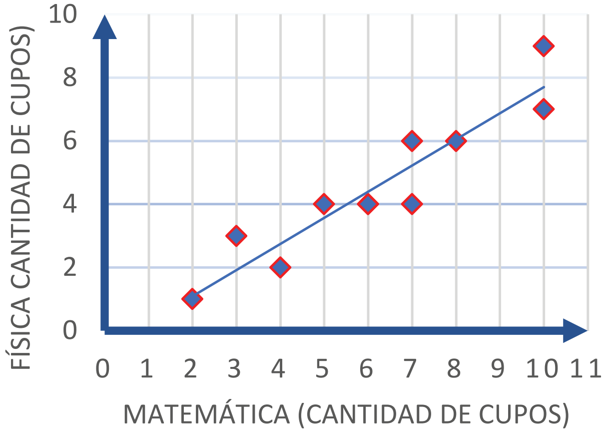
1289. La cantidad de cupos que hay para las materias de Matemáticas y Física en 12 universidades del país se ven en la siguiente tabla:

Mat (x_i)	2	3	4	5	6	6	7	7	8	10	10
Fis (y_i)	1	3	2	4	4	4	6	4	6	7	9

Elabore una nube de puntos y establezca su dependencia lineal.

Resolución

Se construye un diagrama de dispersión, donde el eje de las x's se corresponde a los datos ordenados x_i y el eje de las ordenadas a los datos y_i:



Respuesta La gráfica muestra la existencia de una dependencia lineal positiva y fuerte.

1290. Un jugador de fútbol del equipo A, tiene un registro con resultados entre la distancia a la portería (en metros) y el número de goles.

Distancia en metros (x_i)	1	2	3	4	5
Goles (y_i)	9	10	6	5	2

Encontrar el coeficiente de correlación r de estos datos.

Resolución

Se tabulan los datos añadiendo dos columnas, correspondientes a x_i^2 e y_i^2:

Distancia (x_i)	Cantidad (y_i)	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	9	9	1	91
2	10	20	4	100
3	6	18	9	36
4	5	20	16	25
5	2	10	25	4

Para hallar el coeficiente de correlación:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

se utilizan los promedios $\bar{X} = 3$ de los datos x_i y $\bar{Y} = 6{,}4$ para calcular las desviaciones típicas:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i)^2}{n} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1+4+9+16+25}{5} - 3^2} = \sqrt{2} \qquad (1)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i)^2}{n} - (\bar{X})^2} = \sqrt{\frac{91+100+36+25+4}{5} - (6{,}4)^2} = 3{,}2 \qquad (2)$$

Enseguida se calcula la covarianza, reemplazando en:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{9+20+18+20+10}{5} - 3 \cdot 6{,}4 = -3{,}8 \qquad (3)$$

Con los resultados de (1), (2), (3) se puede calcular el coeficiente de correlación r:

$$r = \frac{-3{,}8}{\sqrt{2} \cdot 3{,}2} \approx -0{,}84$$

Respuesta

El coeficiente de correlación r es aproximadamente -0,84 (la correlación es alta).

1291. Con la covarianza de $-3{,}8$ y una desviación típica igual a $\sqrt{2}$, el director técnico del equipo A que dirige al jugador, debe hallar la recta de regresión y su gráfica en base a sus datos:

Distancia : x_i (en metros)	1	2	3	4	5
Goles (y_i)	9	10	6	5	2

Resolución

Datos

$\sigma_{xy} = -3{,}8$

$\sigma_x = \sqrt{2}$

Se calcula primero los promedios: $\bar{X} = 3$, $\bar{Y} = 6{,}4$ y se reemplazan en la fórmula de la recta de regresión:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{X})$$

Es decir:

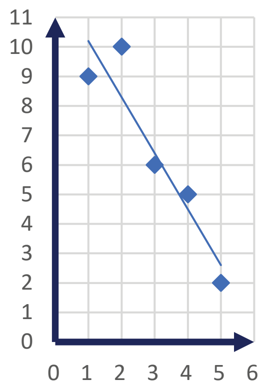
$$y - 6{,}4 = \frac{-3{,}8}{2} \cdot (x - 3) = -1{,}90x + 5{,}7$$

Respuesta

La recta de regresión será:

$$y = -1{,}90x + 12{,}1$$

cuya gráfica es la siguiente:



1292. Sabiendo la recta de regresión del jugador de los datos del jugador:

$$y = -1{,}90x + 12{,}1$$

El DT del equipo A debe estimar su disparo a una distancia de 8 metros.

Resolución

Como la correlación r = -0,84 (la correlación es alta), la estimación será más confiable.

La distancia y es de 8 metros, entonces se debe hallar el valor de x en la ecuación de la recta de regresión; es decir:

$$8 = -1{,}90x + 12{,}1$$

Despejando x:

$$1{,}90x = 12{,}1 - 8$$

$$\Rightarrow x = \frac{12{,}1 - 8}{1{,}90} = \frac{4{,}1}{1{,}90} = 2{,}2 \approx 2$$

Respuesta

A una distancia de 8 metros, se estiman 2 goles (a mayor distancia, menos goles).

Matemática Financiera

1293. La señora Esquivel pide prestados 100 000 bolivianos con la intención de devolverlos al cabo de seis meses con el fin de iniciar un emprendimiento. Una vez que este tiene éxito, ella devuelve una suma de 104 500 bolivianos, ¿cuál fue la tasa de interés anual?

Resolución

Se reemplaza la información que da el problema en la fórmula del interés simple:

$$104\,500 = 100\,000\left(1 + \frac{r}{2}\right)$$

Despejamos r de la ecuación anterior:

$$104\,500 = 100\,000 + 100\,000 \cdot \frac{r}{2}$$

$$= 100\,000 + 50\,000 \cdot r$$

$$\Rightarrow \quad 4500 = 50\,000 \cdot r$$

Luego:

$$r = \frac{4500}{50\,000} = 0{,}09 = 9\%$$

Datos

C_0: Capital Inicial
C_f: Capital final (acumulado)
t: tiempo en años
r: tasa de interés
$C_0 = \text{Bs } 100\,000$
$C_f = \text{Bs } 104\,500$
$t = \frac{1}{2}$
Incógnita:
r

Respuesta

La tasa de interés anual fue del 9%.

1294. Para iniciar la construcción de un edificio, una persona pide prestado 250 000 bolivianos a una tasa del 10% anual. Si se devuelve el préstamo al cabo de nueve meses, ¿qué cantidad habrá que pagar en concepto de intereses?

Resolución

Se transforma el periodo de tiempo 9 meses en años:

$$9 \text{ meses} \times \frac{1}{12} \text{ años/meses} = \frac{9}{12} \text{ años} = 0{,}75 \text{ años}$$

Se reemplaza la información que da el problema:
es decir:

$$I = C_0 \cdot r \cdot t = 250\,000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}75 = 1875$$

Datos

$C_0 = \text{Bs } 250\,000$
$t = 9$ meses
$r = 10\% = 0{,}1$

Respuesta

Por concepto de intereses, habrá que pagar una suma de 1875 bolivianos.

1295. Un grupo de empresarios bolivianos deciden invertir 200 000 bolivianos al 8% de interés compuesto durante 10 años, ¿cuánto será el capital acumulado al cabo de ese tiempo?, ¿cuáles son los intereses producidos por el capital invertido?

Datos

C_0 = Bs 200 000
t = 10 años
r = 8% = 0,08

Incógnita:
I

Resolución

Al reemplazar en la fórmula del interés compuesto, tenemos:

$$C_f = 200\ 000 \cdot (1 + 0{,}08)^{10}$$

de donde se obtiene C_f = 431 780.

Se calculan los intereses producidos en 10 años, restando C_0 al capital acumulado C_f; es decir:

$$I = C_0(1 + r)^t - C_0 = C_f - C_0 = 431\ 780 - 200\ 000 = 231\ 780$$

Respuesta
El capital acumulado en 10 años es de 432 000 bolivianos y los intereses producidos por el capital invertido son 231 780 bolivianos.

1296. Juan recurre al banco para un préstamo de 8000 bolivianos con el fin de comprar un refrigerador. El banco pide un pago en cuotas mensuales iguales durante un año, con una tasa de 6% de interés mensual. ¿Qué monto debe pagar Juan por cada cuota mensual?

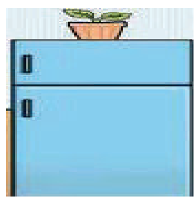
Datos

C_0 = Bs 8000
t = 12 meses
r = 6% = 0,06

Incógnita:
p: cuota mensual.

Resolución

Se calcula la cuota mensual, reemplazando datos en la fórmula del importe por cuota:



$$p = \frac{2C_0}{t(2 - r - rt)}$$

$$= \frac{2 \cdot 8000}{12 \cdot (2 - 0,06 - 0,06 \cdot 12)} = 1092{,}90$$

Respuesta
La cuota mensual que debe pagar Juan al banco es de 1092,9 bolivianos mensuales.

1297. Luciana decide realizar un diplomado en una universidad. La institución le da la opción de pago al contado, el cual contempla un descuento, pero elige la opción de pago por cuotas mensuales en un plazo de 6 meses. Si la tasa de interés mensual es al 2% y el costo al contado del diplomado es de 7000 bolivianos, ¿cuánto es el monto por cuota mensual que debe pagar Luciana?

Resolución

Se calcula la cuota mensual:

Datos

C_0= Bs 7000

t = 6 meses

r = 2% = 0,02

Incógnita:

p

$$p = \frac{2C_0}{t(2-r-rt)} = \frac{2 \cdot 7000}{6 \cdot (2-0{,}02-0{,}02 \cdot 6)} = 1254{,}48$$

Respuesta

La cuota mensual que deberá pagar Luciana es 1254,48 bolivianos.

1298. Un coleccionista de arte desea adquirir una pintura para su colección. La pintura está valorada en Bs 50 000 y él cuenta solo con Bs 20 000. Habiendo tomado una decisión, con el fin de comprar la pintura, invierte su dinero esperando que en dos años, los intereses de su inversión le permitan comprarla, ¿qué tasa de interés anual debe contemplar para comprar la pintura, si la tasa de inflación anual es del 3%?

Resolución

Se procede a calcular el costo de la pintura C_f después de dos años:

$$C_f = 50\,000 \cdot (1+0{,}03)^2 = 53\,405$$

El capital inicial del coleccionista es Bs 20 000, de modo que para obtener en 2 años la suma de Bs 53 405, la tasa de interés r debe ser:

Datos

r_i: Tasa de inflación anual

C_0 = Bs 50 000

t = 2 años

r_i = 0,03 = 3%

Incógnita:

r

$$C_f = C_0(1+r)^t$$

Multiplicando a la igualdad por $\frac{1}{C_0}$:

$$(1+r)^t = \frac{C_f}{C_0} \Rightarrow r = \sqrt[t]{\frac{C_f}{C_0}} - 1$$

Reemplazando datos:

$$r = \sqrt{\frac{53\,405}{20\,000}} - 1 = 0{,}63 = 63\%$$

Respuesta
La tasa de interés anual que el coleccionista necesita al invertir 20 000 bolivianos para comprar la pintura en 2 años es del 63%.

1299. La abuela de Iris, mencionó que tiene 10 años laborales antes de su jubilación. Ella le pidió a su nieta calcular el monto de dinero a depositar al 15% anual, para obtener una renta anual de Bs 2000 por un plazo de 10 años.

Datos
R: Renta anual
R = Bs 2000
t = 10 años
r = 0,15
Incógnita:
C: capital a invertir

Resolución

Reemplazando datos en la fórmula del capital a invertir:

$$C = 2000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0{,}15)^{10}}}{0{,}15} = 10\ 037{,}54$$

Respuesta
El cálculo de Iris muestra un capital a invertir de Bs 10 037,54.

1300. Ernesto recibe un préstamo de 500 bolivianos de su colega Jazmín. Esta última quiere una devolución en un plazo de dos meses, con un interés quincenal del 0,07%, ¿qué cantidad le corresponde pagar cada quincena a Ernesto para saldar su deuda?

Datos

C = Bs 500
t = 2 meses = 4 quincenas
r = 0,07
Incógnita:
R: Cuota quincenal

Resolución

Reemplazando la información en la fórmula del capital a invertir:

$$R = \frac{C \cdot r}{1 - \frac{1}{(1+r)^t}} = \frac{500 \cdot 0{,}007}{1 - \frac{1}{(1+0{,}007)^4}} = 127{,}20$$

Respuesta
Ernesto debe pagar 127,20 bolivianos por quincena para saldar su deuda con Jazmín.

Tablas de frecuencias (gráficas)

1301. Se han seleccionado aquellas pastillas que no pasaron el control de calidad de cada uno de los 25 frascos producidos por un laboratorio:

3, 2, 5, 3, 3, 2, 1, 3, 2, 2, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 5, 2, 4, 1, 1, 3, 2

Se pide:

a) Clasificar el carácter estudiado.

b) Elaborar una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Resolución

Se ordenan los datos de menor a mayor:

1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5

La cantidad de pastillas varía de 1 a 5, luego:

$$n_1 = 5,\ n_2 = 8,\ n_3 = 6,\ n_4 = 2,\ n_5 = 4$$

Con las frecuencias absolutas, se calculan las frecuencias relativas:

$$f_1 = \frac{n_1}{n} = 0{,}2;\ f_2 = \frac{n_2}{n} = 0{,}32;\ f_3 = \frac{n_3}{n} = 0{,}24;\ f_4 = \frac{n_4}{n} = 0{,}08;\ f_5 = \frac{n_5}{n} = 0{,}16$$

Respuestas

a) Se identifica el carácter estudiado, siendo la cantidad de pastillas en cada caja una variable. Por tanto, la variable es cuantitativa del tipo discreto.

b) Se procede a organizar la información en la tabla:

N° de pastillas	n_i	f_i
1	5	0,2
2	8	0,32
3	6	0,24
4	2	0,08
5	4	0,16
TOTAL	**25**	**1**

1302. Se ha consultado a un grupo de 50 personas sobre su grado de satisfacción en su trabajo actual, obteniéndose los siguientes resultados:

Respuesta	Muy mal	Mal	Normal	Bien	Muy bien
N° de Personas	8	10	20	8	4

a) Clasificar el carácter estudiado.
b) Elaborar una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Datos

x_1: "muy mal"
x_2: "mal"
x_3: "normal"
x_4: "bien"
x_5: "muy bien"
$x = 50$

Incógnitas:
fi: Frecuencia relativa del i-ésimo dato.

Resolución

Se acomoda por jerarquía:

"muy mal", "mal", "normal", "bien", "muy bien"

De la tabla, se obtienen las frecuencias absolutas n_i como sigue:

- Un total de 8 personas respondieron "muy mal", luego $n_1 = 8$.
- Un total de 10 personas respondieron "mal", luego $n_2 = 8$.
- Un total de 10 personas respondieron "normal", luego $n_3 = 20$.
- Un total de 8 personas respondieron "bien", luego $n_4 = 8$.
- Un total de 4 personas respondieron "muy bien", luego $n_5 = 4$.

Sabiendo las frecuencias absolutas, podemos calcular las frecuencias relativas, con $n_5 = 8$:

$$f_1 = \frac{8}{50}; f_2 = \frac{10}{50}; f_3 = \frac{20}{50}; \ f_4 = \frac{8}{50}; f_5 = \frac{4}{50}$$

Cuyos valores son:

$$f_1 = 0{,}16; f_2 = 0{,}2; \ f_3 = 0{,}4; \ f_4 = 0{,}16; \ f_5 = 0{,}08$$

Respuestas

a) Se identifica el carácter estudiado, siendo el tipo de respuesta una variable. Por tanto, la variable es cualitativa del tipo ordinal.
b) Se procede a organizar la información en la tabla:

Tipo de Respuesta	n_i	f_i
Muy mal	8	0,16
Mal	10	0,2
Normal	20	0,4
Bien	8	0,16
Muy bien	4	0,08
TOTAL	50	1

1303. Un estudiante ha recolectado datos en una tabla acerca de las preferencias y gustos musicales de sus 146 compañeros de colegio:

a) Clasificar el carácter estudiado.

b) Elaborar una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Estilo	N° de personas
Folklore	40
Rock	15
Pop	23
Reguetón	60
Jazz	5
Otros	3
TOTAL	146

Resolución

De la tabla, se obtienen las frecuencias absolutas

$$n_1 = 40; n_2 = 15; n_3 = 20; n_4 = 8; n_5 = 5; n_6 = 3$$

Se calculan las frecuencias relativas, con $n = 146$:

$$f_1 = \frac{40}{146} = 0{,}27; f_2 = \frac{15}{146} = 0{,}10; f_3 = \frac{23}{146} = 0{,}16$$

$$f_4 = \frac{60}{146} = 0{,}41; f_5 = \frac{4}{146} = 0{,}03; f_6 = \frac{3}{146} = 0{,}02$$

Datos

x_1: "Folklore"
x_2: "Rock"
x_3: "Pop"
x_4: "Reggaetón"
x_5: "Jazz"
x_6: "Otros"
$n = 146$

Incógnitas:
f_i

Respuestas

a) Se identifica el carácter estudiado, siendo la respuesta de cada persona una variable. Por tanto, la variable es cualitativa del tipo nominal.

b) La tabla buscada es:

Estilo x_i	n_i	f_i
Folklore	40	0,27
Rock	15	0,10
Pop	23	0,16
Reggaetón	60	0,41
Jazz	4	0,03
Otros	3	0,02
TOTAL	146	1

1304. Promotores de salas de cine han realizado un estudio sobre el número de veces que van al cine en un año un grupo de 39 jóvenes, obteniéndose los siguientes resultados:

3,2,1,3,2,4,1,4,3,2,1,5,3,6,3,5,3,2,5,1,3,1,2,1,4,2,6,4,2,3,3,2,4,3,1,5,2,1,3,2

a) Clasificar el carácter estudiado.
b) Elaborar una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Resolución

Se ordenan los 39 datos de menor a mayor:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6

Las frecuencias absolutas son:

$$n_1 = 8;\ n_2 = 10;\ n_3 = 11; n_4 = 4; n_5 = 4; n_6 = 2$$

Se calculan las frecuencias relativas:

$$f_1 = 0{,}21;\ f_2 = 0{,}26;\ f_3 = 0{,}28; f_4 = 0{,}10;\ f_5 = 0{,}10;\ f_6 = 0{,}05$$

Respuestas

a) La variable es la cantidad de veces de jóvenes que va al cine. Esta es cuantitativa del tipo discreto.
b) Se muestra la tabla buscada a continuación:

N° visitas al cine	n_i	f_i
1	8	0,21
2	10	0,26
3	11	0,28
4	4	0,10
5	4	0,10
6	2	0,05
TOTAL	**39**	**1**

1305. A través de un sondeo de opinión, se ha preguntado a un grupo de 100 personas por su grado de satisfacción sobre el uso de videoconferencias en el trabajo, obteniéndose los resultados en la tabla.

Tipo de Respuesta	N° de personas
Muy insatisfecho	15
Insatisfecho	25
Normal	28
Satisfecho	20
Muy Satisfecho	12

a) Clasificar el carácter estudiado.
b) Elaborar una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Resolución

Se acomodan los datos por jerarquía:

"muy insatisfecho", "Insatisfecho", "Normal", "Satisfecho", "Muy satisfecho"

Las frecuencias absolutas son:

$$n_1 = 15;\ n_2 = 25;\ n_3 = 28;\ n_4 = 20;\ n_5 = 12$$

Se calculan las frecuencias relativas:

$$f_1 = \frac{15}{100} = 0{,}15;\ f_2 = \frac{25}{100} = 0{,}25;\ f_3 = \frac{28}{100} = 0{,}28,\ f_4 = \frac{20}{100} = 0{,}2;\ f_5 = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

Respuestas

a) La variable es la respuesta de cada persona, tomando valores tipo atributo, pudiendo establecer una jerarquía entre ellos, por tanto esta variable es cualitativa del tipo ordinal.

b) Se muestra la tabla de frecuencias absolutas y relativas a continuación:

Tipo de Respuesta	n_i	f_i
Muy Insatisfecho	15	0,15
Insatisfecho	25	0,25
Normal	28	0,28
Satisfecho	20	0,2
Muy satisfecho	12	0,12
TOTAL	**100**	**1**

Gastos Públicos	Dinero (en millones) (x_i)
Gas	15
Agua	30
Gasolina	25
Salud	30
Carreteras	15
Empleos	10
Seguridad	5
Otros	10

1306. En la tabla se recogen las cantidades de dinero (en millones) gastadas por el gobierno de una región en el último año. Encontrar las frecuencias absolutas y relativas y acomodarlas en una tabla.

Resolución

Se ordenan los datos x_i de menor a mayor:

$$5, 10, 10, 15, 15, 25, 30, 30$$

Luego las frecuencias absolutas son:

$$n_1 = 1; n_2 = 2;\ n_3 = 2;\ n_4 = 1;\ n_5 = 2$$

Sabiendo las frecuencias absolutas, podemos calcular las frecuencias relativas, con $n = 8$:

$$f_1 = \frac{1}{8} = 0{,}13;\ f_2 = \frac{2}{8} = 0{,}25;\ f_3 = \frac{2}{8} = 0{,}25;\ f_4 = \frac{1}{8} = 0{,}13;\ f_5 = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

Respuestas

Tabulando estos resultados, se obtiene la tabla de frecuencias absolutas y relativas a la izquierda. Se muestra la tabla buscada a continuación: La suma de los números de la columna n_i es igual a $n = 8$ y la suma de los números de la columna f_i es 1.

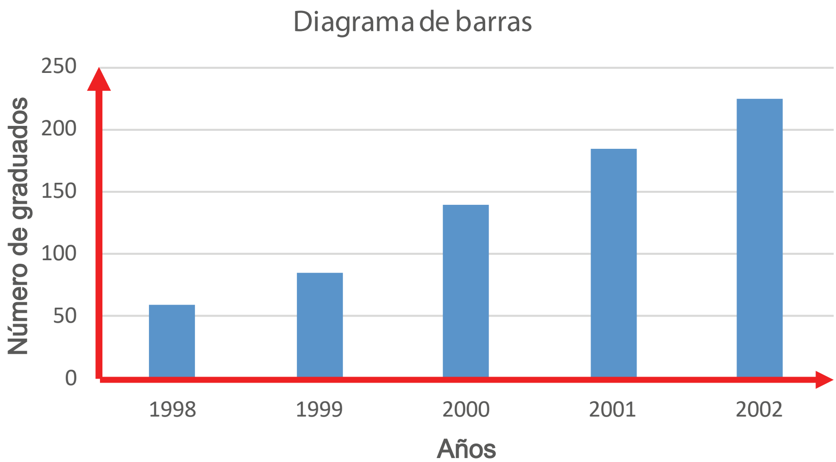
Dinero (en millones)	n_i	f_i
5	1	0,13
10	2	0,25
15	2	0,25
25	1	0,13
30	2	0,25
TOTAL	**8**	**1**

1307. Un estudiante de Estadística, tiene como trabajo práctico realizar un diagrama de barras e interpretar el resultado. Para ello recibe una tabla detallada a continuación:

Años	1998	1999	2000	2001	2002
N° de graduados	60	85	140	185	225

Resolución

La representación en diagrama de barras, donde el eje de las abcisas contiene a los años 1998, 1999, 2000, 2001, 2002.
El eje de las ordenadas contiene la cantidad de graduados en ese tiempo.



Respuesta
El año 2002 hubo la mayor cantidad de graduados y en 1998 hubo la menor cantidad.

Medidas de tendencia central

1308. Bernardo es maestro de escuela y debe encontrar $\sum x_i$ en las notas sus 11 estudiantes, cuyo promedio es igual a 24.

Datos

$n = 11$

$\bar{X} = 24$

Resolución

Se reemplazan los datos:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum_1^{11} x_i}{11} \Rightarrow 24 = \frac{\sum x_i}{11}$$

Multiplicando por 11 ambos lados de la ecuación anterior queda:

$$264 = \sum_{1}^{11} x_i$$

Respuesta

La sumatoria $\sum_{1}^{11} x$ es 264

1309. El promedio de notas de Andrea es igual a 96. Si la suma de estas es igual a 864, ¿cuál es la cantidad de notas dentro del boletín de calificaciones de Andrea?

Datos

$\sum x_i = 864$

$\bar{X} = 96$

Resolución

Se reemplazan los datos:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow 96 = \frac{864}{n}$$

Multiplicamos por n ambos lados de la ecuación, para obtener:

$$96n = 864$$

Despejando n:

$$n = \frac{864}{96} = 9$$

Respuesta

La cantidad de notas del boletín de Andrea es 9.

1310. Un registro tiene información sobre las edades de los miembros de un club de lectura, que son:

14, 15, 17, 16, 15, 18, 14, 17, 16

Se pide encontrar la mediana y el promedio de estas edades e interpretar los resultados.

Resolución

Incógnitas: $Me, \bar{X}$

Como $n = 9$ es un número impar, se busca el dato intermedio de la muestra, calculando:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Se ordenan los datos de forma creciente:

$$14, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18$$

Así, la mediana está en la quinta posición:

$$Me = 16$$

Ahora, calculando el promedio $\bar{X}$:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum_1^9 x_i}{9} \Rightarrow \bar{X} = \frac{14+14+15+15+16+16+17+17+18}{9} = 16$$

Respuesta

La mediana solamente sugiere que las edades de la muestra se dividen en 2 subgrupos: mayores de 16 años y menores de 16 años y el promedio de edad de los miembros es aproximadamente 16 años.

1311. Alex es un vendedor de música con más de 5000 títulos organizados por formato (ver tabla).
¿Cuál es el promedio de sus ganancias si cada vinilo se vende en Bs 60, cada disco compacto en Bs 50, cada cinta de cassette en Bs 30, cada archivo digital y otros formatos en Bs 20?

Formato	Cantidad
Vinilo	2700
CD	1500
Cinta de audio	700
Digital	50
Otros	5

Resolución

Se calculan las ganancias por las ventas:

- Vinilos: $2700 \cdot 60 = 16\,200$ Bs.
- Discos compactos: $1500 \cdot 50 = 7500$ Bs.
- Cinta de audio: $700 \cdot 30 = 2100$ Bs.
- Digital: $50 \cdot 20 = 1000$ Bs.
- Otros: $5 \cdot 20 = 100$ Bs.

El promedio de las ganancias totales será:

$$\frac{16\,200 + 7500 + 2100 + 1000 + 100}{5} = 5380$$

Respuesta

El vendedor ganará en promedio Bs 5380 por la venta de sus artículos.

1312. En una clase de 10 estudiantes, las calificaciones de un examen son las siguientes:

$$45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90$$

La maestra decide dar una bonificación de 5 puntos a cada estudiante que obtuvo una calificación inferior a la mediana y una reducción de 3 puntos a cada estudiante que obtuvo una calificación superior a la mediana. Después de aplicar estas bonificaciones y reducciones, recalcula la media, mediana y moda de las nuevas calificaciones.

Datos

$n = 10$

Incógnitas:

$Me, Me_2, Mo, \bar{X}$

Resolución

Como $n = 10$ es par, se calcula:

$$\frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5, \qquad \frac{n}{2} + 1 = \frac{10}{2} + 1 = 6$$

Se ordenan los datos de forma creciente:

$$45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90$$

Se calcula la mediana con $x_5 = 65$ y $x_6 = 70$:

$$Me = \frac{135}{2} = 67{,}5$$

Así la calificación que corresponde a la mediana es 67,5.

Luego con la bonificación de las notas menores a 67,5, quedan:

$$50, 55, 60, 65, 70$$

Las notas mayores a 67,5 luego de la reducción, quedan:

$$67, 72, 77, 82, 87$$

Por tanto, la nueva muestra de calificaciones (y_j), ordenada de forma creciente es:

$$50, 55, 60, 65, 67, 70, 72, 77, 82, 87$$

Se procede a calcular su mediana con $y_5 = 67$ y $y_6 = 70$:

$$Me_2 = \frac{y_5 + y_6}{2} = \frac{67 + 70}{2} = \frac{135}{2} = 68{,}5$$

La media aritmética es:

$$\bar{Y} = \frac{50 + 55 + 60 + 65 + 67 + 70 + 72 + 77 + 82 + 87}{10} = 68{,}5$$

Respuesta

El nuevo valor del promedio es 68,5, el mismo que la mediana. La muestra no presenta una moda.

1313. En una fábrica, se registran las horas extras trabajadas por 12 empleados en una semana. Los datos son los siguientes:

$$2, 3, 5, 2, 8, 6, 5, 3, 2, 4, 5, 3$$

Se pide:

a) Calcular la moda de las horas extras trabajadas.
b) Si la fábrica decide dar un bono adicional a los empleados que trabajaron la cantidad de horas extra igual a la moda, calcular cuántos empleados recibirán el bono.
c) Si se supone que dos empleados adicionales trabajaron 5 horas extra, actualizar los datos y recalcular la moda.

Resolución

Se ordena la base de datos crecientemente:

$$2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 8$$

Respuestas

a) Las horas extras más frecuentes son 2,3 y 5 horas, por tanto hay tres modas en la muestra.
b) Como existen tres modas, habrá 9 empleados que recibirán el bono adicional.
c)Añadimos los tiempos de los dos empleados a la muestra:

$$2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 8$$

Así, la moda de esta nueva muestra es 5.

1314. Se ha realizado un estudio relativo a los lugares y a la frecuencia con que se contagia la gripe entre las personas. Se han obtenido los siguientes resultados:

Lugar de contagio (x_i)	Familia	Centro de trabajo	Otros
N° de personas	26	19	15

Hacer un diagrama de sectores que recoja esta información e interpretar el resultado.

Resolución

Se anotan las frecuencias absolutas, en este caso el número de contagiados en cada lugar y se calcula la amplitud A (el sector que ocupará un dato en el diagrama final de sectores) utilizando la fórmula:

$$A = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{60} = 6°$$

Datos

$n_1 = 26$; $n_2 = 19$
$n_3 = 15$; $n = 60$

Incógnitas:

A: Amplitud
A_{x_1}: Amplitud del dato x_1
A_{x_2}: Amplitud del dato x_2
A_{x_3}: Amplitud del dato x_3

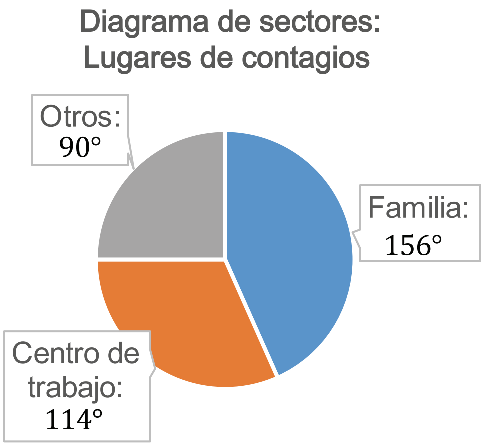
Se reemplazan los datos en la fórmula para calcular la amplitud de cada sector:

$$A_{x_1} = A \cdot n_1 = \frac{360°}{n} \cdot n_1 = \frac{360°}{60} \cdot 26 = 6° \cdot 26 = 156°$$

$$A_{x_2} = A \cdot n_2 = \frac{360°}{n} \cdot n_2 = \frac{360°}{37} \cdot 19 = 6° \cdot 19 = 114°$$

$$A_{x_3} = A \cdot n_3 = \frac{360°}{n} \cdot n_3 = \frac{360°}{37} \cdot 15 = 6° \cdot 15 = 90°$$

Utilizando un transportador en grados, se traza una circunferencia y desde el centro se van midiendo las amplitudes de cada sector.
La representación en diagrama de sectores quedará así:



Respuesta
El diagrama de sectores para esta muestra indica un mayor número de contagios en el entorno familiar, mientras que menos contagios se dan por otras causas.

Medidas de dispersión

1315. En su reporte de calificaciones de la universidad, Adela lee el siguiente mensaje:

"Su promedio tiene una desviación de 12"

A su vez, en el reporte de Carlos se lee lo siguiente:

"Su promedio tiene una desviación de -20"

Si el promedio de aprobación oficial de la universidad es de 66 puntos, ¿cuál es la interpretación más adecuada para estos mensajes?

Resolución

Sea $\bar{X} = 66$ el promedio oficial de las notas que da la universidad.
El promedio x_A de Adela tiene una desviación de 12:

$$x_A - \bar{X} = 12$$

O es equivalente:

$$x_A - 66 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_A = 78$$

El promedio de Adela es igual a 78 puntos.

Que el promedio x_C de Carlos tenga una desviación de -20, significa que:

$$x_C - \bar{X} = -20$$

O es equivalente:

$$x_C - 66 = -20 \quad \Rightarrow \quad x_C = 46$$

El promedio de Carlos es igual a 46 puntos.

Respuesta

Cuando la desviación es positiva, significa nota de aprobación y cuando la desviación es negativa, significa reprobación.

1316. Una entidad que regula los impuestos del país publicó en la siguiente tabla, información acerca del promedio anual de impuestos y el ingreso personal que se otorga a cada persona por departamento:

CIUDAD	Impuestos por persona	Porcentaje de ingreso personal
Ciudad A	1000	8,3
Ciudad B	1200	9,5
Ciudad C	700	5,3

Encontrar:

a) El valor del rango para la variable "Impuestos por persona".
b) El valor del rango para la variable "Porcentaje de ingreso personal".

Resolución

a) Se identifica $x_{max} = 1200$ y $x_{min} = 700$ para la variable "Impuestos por persona".
Reemplazando en la fórmula del rango:

$$R = x_{max} - x_{min} = 1200 - 700 = 500$$

b) Se identifica $x_{max} = 9{,}5$ y $x_{min} = 5{,}3$ para la variable "Porcentaje de ingreso personal".

$$R = x_{max} - x_{min} = 9{,}5 - 5{,}3 = 4{,}2$$

Respuestas

a) Para la variable "Impuesto por persona" el rango es $R = 500$
b) Para la variable "Porcentaje de ingreso personal" el rango es $R = 4{,}2$

1317. Analía recopila sobre la duración en minutos sus 7 canciones favoritas en su celular:

7, 6, 8, 5, 3, 5, 3

Se pide investigar:

a) El valor del rango.
b) El valor de la varianza.
c) El valor de la desviación estándar, el coeficiente de variación
Interpretar los resultados.

Resolución

a) Se identifica $x_{max} = 8$ y $x_{min} = 3$, luego:

$$R = x_{max} - x_{min} = 8 - 3 = 5$$

b) Para hallar la varianza, se calcula la media aritmética:

$$\bar{X} = \frac{7+6+8+5+3+5+3}{7} = 5{,}28$$

Luego se procede a calcular la varianza:

$$V = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{(7-5{,}28)^2 + (6-5{,}28)^2 + (8-5{,}28)^2 + (5-5{,}28)^2 + (3-5{,}28)^2 + (5-5{,}28)^2 + (3-5{,}28)^2}{7} = 3{,}06$$

c) Se calcula la desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{3{,}06} = 1{,}76$$

El coeficiente de variación es:

$$CV = \frac{\sigma}{|\bar{X}|} = \frac{1{,}75}{5{,}28} = 0{,}33 = 33\%$$

Respuesta

El valor del promedio 5,28 está lejos de ser nulo, de modo que el coeficiente de variación es fiable. Este al ser mayor a 30% indica gran dispersión en los datos; es decir, en la duración de las canciones.

1318. Rosaura realiza el mismo experimento que su amiga Analía, con la duración en minutos de sus 7 canciones favoritas en su celular:

6, 6, 7, 5, 4, 5, 4

Encontrar el coeficiente de variación y compararlo con el resultado que se obtuvo para Analía, ¿a qué conclusión se puede llegar?

Resolución

Se calcula la media aritmética:

$$\bar{X}=\frac{6+6+7+5+4+5+4}{7}=5{,}29$$

Luego se procede a calcular la varianza:

$$V=\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n}=\frac{\begin{array}{c}(6-5{,}29)^2+(6-5{,}29)^2+(7-5{,}29)^2+(5-5{,}29)^2\\+(4-5{,}29)^2+(5-5{,}29)^2+(4-5{,}29)^2\end{array}}{7}=1{,}06$$

Utilizando el valor de la varianza V = 1,06, se calcula la desviación estándar:

$$\sigma=\sqrt{1{,}06}=1{,}03$$

El coeficiente de variación tiene el valor:

$$CV=\frac{\sigma}{|\bar{X}|}=\frac{1{,}03}{5{,}29}=0{,}19=19\%$$

Respuesta

El valor del promedio 5,29 está lejos de ser nulo, de modo que el coeficiente de variación es fiable. Este al ser menor que 30% indica baja dispersión en los datos; es decir, la duración de las canciones favoritas de Rosaura está más cercanas 5,28 que las de Analía.

1319. Carlos anota la cantidad de azúcar en gramos que consume durante una semana en la siguiente tabla:

Día	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad x_i (g)	80,5	80,8	90	70,5	90,6	100,8	97,3

El valor promedio de consumo es de 87,2 gramos por día y su desviación estándar es de 9,79. Si Carlos va a reducir su consumo en 30 gramos por día, ¿cómo varían la media y la desviación típica?

Resolución

Las nuevas cantidades de consumo semanal son:

50,5; 50,8; 60; 40,5; 60,6; 70,8; 67,3

Se calcula la media aritmética:

$$\bar{X}_2=\frac{50{,}5+50{,}8+60+40{,}5+60{,}6+70{,}8+67{,}3}{7}=57{,}2$$

Luego se calcula la varianza:

$$V=\frac{\begin{array}{c}(50{,}5-57{,}2)^2+(50{,}8-57{,}2)^2+(60-57{,}2)^2+(40{,}5-57{,}2)^2+\\(60{,}6-57{,}2)^2+(70{,}8-57{,}2)^2+(67{,}3-57{,}2)^2+\end{array}}{7}=95{,}84$$

Datos

$\bar{X}_1=87{,}2$

$\sigma_1=9{,}79$

Incógnitas:

$\bar{X}_2, \sigma_2$

Utilizando el valor de la varianza $V = 95{,}84$, se calcula la desviación estándar:

$$\sigma_2 = \sqrt{95{,}84} = 9{,}79$$

Respuesta

El valor del promedio con el consumo reducido es 57,2, es decir; 30 gramos menos respecto a $\bar{X}_1 = 87{,}2$ pero la desviación estándar no se ve afectada ($\sigma_2 = \sigma_1$).

1320. Patricia, durante su tiempo de práctica de 8 horas diarias, puede interpretar una pieza de guitarra clásica detallada en la siguiente tabla:

Hora	1	2	3	4	5	6	7	8
Tiempo x_i (min)	10,5	9,8	8,7	7,5	7	7,8	6,9	7

El tiempo promedio en la interpretación de la pieza es de 8,3 segundos y su desviación estándar es de 1,29. Para mejorar algunos detalles de ejecución, se propone en demorar 5 minutos todos sus tiempos. Luego de esto, ¿cómo varían su promedio y la desviación típica?

Resolución

Datos

$\bar{X}_1 = 8{,}3$

$\sigma_1 = 1{,}29$

Incógnitas:

$\bar{X}_2, \sigma_2$

Las marcas de tiempo demoradas 5 minutos (y_i) son:

15,5; 14,8; 13,7; 12,5; 12; 12,8; 11,9; 12

Se calcula el nuevo promedio:

$$\bar{X}_2 = \frac{15{,}5 + 14{,}8 + 13{,}7 + 12{,}5 + 12 + 12{,}8 + 11{,}9 + 12}{8} = 13{,}2$$

Luego se calcula la varianza:

$$V = \frac{(15{,}5 - 13{,}2)^2 + (14{,}8 - 13{,}2)^2 + (13{,}7 - 13{,}2)^2 + (12{,}5 - 13{,}2)^2 + (12 - 13{,}2)^2 + (12{,}8 - 13{,}2)^2 + (11{,}9 - 13{,}2)^2 + (12 - 13{,}2)^2}{8} = 1{,}66$$

Utilizando el valor de la varianza $V = 1{,}66$, se calcula la desviación estándar:

$$\sigma_2 = \sqrt{1{,}66} = 1{,}29$$

Respuesta

El valor del promedio en minutos es 13,2 la media se aumenta en 5 minutos, pero la desviación estándar no se ve afectada.

1321. En clase de Matemática, a Jerónimo le preguntaron qué ocurre con los valores de la varianza y la desviación típica con una cantidad finita de datos numéricos iguales entre sí.

Resolución

Supongamos que hay un total de $m > 0$ datos.
Para encontrar la varianza, antes se debe encontrar la media aritmética:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} + x_m}{m}$$

Datos

$x_1 = x_2 = \cdots = x_m$

Incógnitas:

V, σ

Pero todos los datos son iguales entre sí, luego:

$$\bar{X} = \frac{x_j + x_j + \cdots + x_j + x_j}{m} = \frac{m \cdot x_j}{m} = x_j$$

donde el subíndice j puede tomar cualquier valor entre 1 y m.
Luego se procede a calcular la varianza:

$$V = \frac{\sum_1^m (x_i - \bar{X})^2}{m} = \frac{(x_1 - x_j)^2 + (x_2 - x_j)^2 + \cdots + (x_m - x_j)^2}{m}$$

$$= \frac{(x_1 - x_1)^2 + (x_2 - x_2)^2 + \cdots + (x_m - x_m)^2}{m}$$

$$= \frac{0 + 0 + \cdots + 0}{m} = 0$$

Utilizando el valor de la varianza $V = 0$, se calcula la desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{0} = 0$$

Respuesta
Los valores de la varianza y la desviación típica son ambos iguales a cero. Los datos no presentan variación alguna, pues todos son iguales.

Regresión Lineal

1322. El promedio de tiempo en el que Javier puede resolver 20 ejercicios sencillos es 0,25 horas y la desviación típica es de 0,02. Con estos datos Javier necesita encontrar e interpretar la información.

Intermedio 02

Datos

$\sigma = 0{,}02$

$\bar{X} = 0{,}25$

Resolución

Reemplazando datos:

$$CV = \frac{0,02}{|0{,}25|} \Rightarrow CV = 0,08 = 8\%$$

Respuesta

El coeficiente de variación CV = 8% es menor a 30%, es decir Javier casi siempre resolverá 20 ejercicios en un en un cuarto de hora.

1323. Liliana debe investigar el diagrama de dispersión de las siguientes tablas de datos:

a)

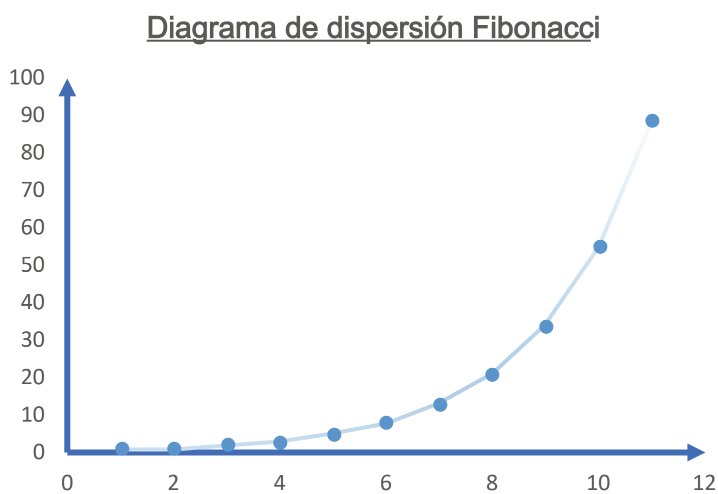
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

b)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31

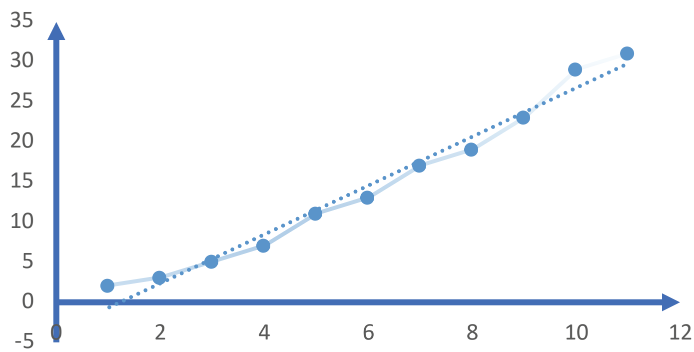
Resolución

a) Se observa que los datos de y corresponden a los primeros 11 números de la serie de Fibonacci.



b) Se observa que los datos de y corresponden a los primeros 11 números primos.

Diagrama de dispersión primos



Respuestas

a) El diagrama de dispersión muestra una correlación, pero esta no es del tipo lineal.

b) El diagrama de dispersión muestra una correlación que es del tipo lineal fuerte y positiva.

1324. Se pide completar la siguiente tabla:

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	$(x_i)^2$	$(y_i)^2$

donde la tabla que relaciona (x_i) con (y_i) es:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

los primeros 11 números de la serie de Fibonacci.

Respuesta

Se completa la tabla multiplicando cada x_i con su respectivo y_i y calculando los cuadrados de ambos. Con esta información se llena la tabla:

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	$(x_i)^2$	$(y_i)^2$
1	1	1	1	1
2	1	2	4	1
3	2	6	9	4
4	3	12	16	9
5	5	25	25	25
6	8	48	36	64
7	13	91	41	169
8	21	168	64	441
9	34	306	81	1156
10	55	550	100	3025
11	89	979	121	7921
TOTAL		2188	506	12 816

1325. Completar la siguiente tabla:

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	$(x_i)^2$	$(y_i)^2$

donde la tabla que relaciona (x_i) con (y_i) es:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31

los primeros 11 números primos.

Respuesta

Se completa la tabla multiplicando cada x_i con su respectivo y_i y calculando los cuadrados de ambos. Con esta información la tabla queda:

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	$(x_i)^2$	$(y_i)^2$
1	2	2	1	4
2	3	6	4	9
3	5	15	9	25
4	7	28	16	49
5	11	55	25	121
6	13	78	36	169
7	17	119	41	289
8	19	152	64	361
9	23	207	81	529
10	29	290	100	841
11	31	341	121	961
TOTAL		1293	506	3358

Observe que $\sum_1^{11} x_i \cdot y_i = 1293$, $\sum_1^{11} x_i^2 = 506$ y $\sum_1^{11} x_i^2 = 3358$.

1326. Las tallas y los pesos de 9 postulantes a la Academia de Policías se registraron en la siguiente tabla:

Talla x_i (cm)	160	165	170	175	180	185	190	191	192
Peso y_i (kg)	55	57	60	70	75	82	90	76	100

a) Calcular la covarianza.
b) Obtener la recta de regresión y sobre x.

Resolución

a) Tabulamos las variables:

Talla (x_i)	Peso (y_i)	$x_i \cdot y_i$	$(x_i)^2$
160	55	8800	25 600
165	57	9405	27 225
170	60	10 200	28 900
175	70	12 250	30 625
180	75	13 500	32 400
185	82	15 170	34 225
190	90	17 100	36 100
191	76	14 516	36 481
192	100	19 200	36 864
SUMATOTAL		120 141	288 420

El promedio de las tallas (x_i) es $\bar{X} = 178{,}67$ y el promedio de los pesos (y_i) es $\bar{Y} = 73{,}89$.

Se procede a calcular la covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{120\,141}{9} - 178{,}67 \cdot 73{,}89 = 147{,}07$$

b) Ahora, la varianza V_x de la variable independiente "Talla" es:

$$V_x = \sigma_x^2 = \frac{288\,420}{9} - (178{,}67)^2 = 123{,}70$$

Por tanto, la recta de regresión de "Peso" sobre "Talla" es:

$$y - 73{,}89 = \frac{147{,}07}{123{,}70} \cdot (x - 178{,}67) = 1{,}18x - 210{,}83$$

Respuesta

a) La covarianza es $\sigma_{xy} = 147{,}07$

b) La recta de regresión es $y = 1{,}18x - 136{,}94$

1327. En una unidad educativa ubicada de una zona de la ciudad, se ha consultado a 4 maestros sobre el costo de sus celulares y su salario mensual, cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Costo celular (x_i)	1580	1420	1200	500
Salario mes(y_i)	3600	3000	2500	2500

Elaborar la tabla de doble entrada y el diagrama de dispersión correspondiente

Resolución

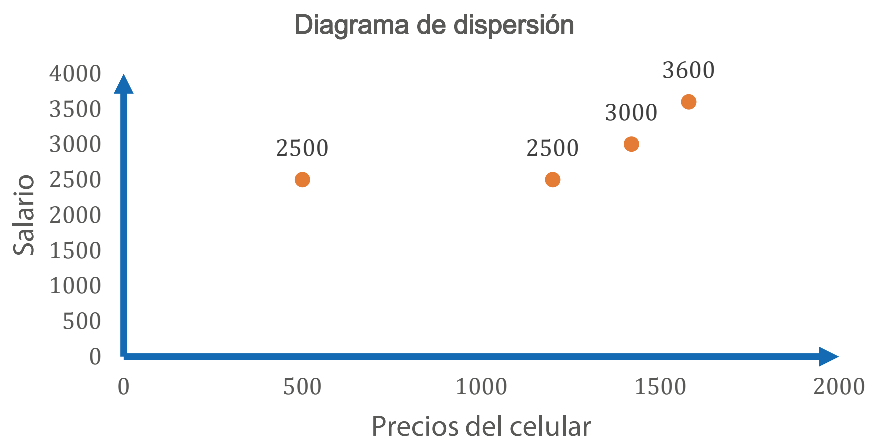
La variable independiente es x_i (Costo celular) y la variable dependiente es y_i (Salario mes).

Respuesta

La tabla de doble entrada queda:

Salario \ Costo	500	1200	1420	1580	Total
2500	$n_{11}=1$	$n_{21}=1$			2
3000			$n_{23}=1$		1
3600	$n_{13}=1$				1
Total	2	1	1		$n=4$

La nube de puntos que representa los datos es:



1328. El precio de la caja de tomates fue variando a lo largo de los últimos 7 días:

Día(x_i)	1	2	3	4	5	6	7
Costo Bs (y_i)	250	251	250	260	270	290	290

Elaborar:

a) La tabla de doble entrada.
b) La nube de puntos que representa a los datos.

Resolución

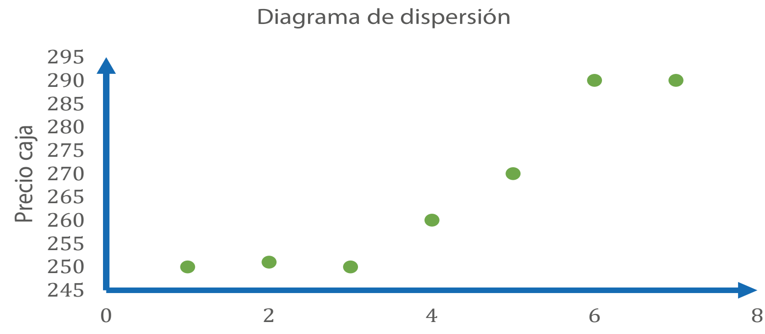
La variable independiente es x_i (Día) y la variable dependiente es y_i (Costo por caja en bolivianos).

Respuestas

a) La tabla de doble entrada queda:

(y_i) \ (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	Total
250	1		1					2
251		1						1
260				1				1
270					1			1
290						1	1	2
Total	1	1	1	1	1	1	1	$n = 7$

a) La nube de puntos que representa los datos es:



Estadística para datos agrupados

1329. El personal de un laboratorio de oftalmología hizo una medición del tiempo en que 30 personas con vista cansada, mantenían cerrados los ojos después de parpadear, obteniendo los siguientes resultados en segundos:

1; 1,53; 1,21; 1,77; 1,2; 1,59; 1,49; 1,98; 1,86; 1,2;

1,37; 1,16; 1,92; 1,45; 1,73; 1,39; 1,62

Se pide elaborar una tabla de frecuencias absolutas agrupadas y las marcas de clase.

Datos

$X_{max} = 1{,}98$
$X_{min} = 1$
$n = 17$
Incógnitas:
A: Amplitud de clase
k

Resolución

Se calcula primero el rango R, donde:

$$R = X_{max} - X_{min} = 0,98$$

Una vez encontrado R, buscamos el valor de k, utilizando la regla de Sturges como sigue:

$$k = 1 + \frac{\log(n)}{\log(2)} = 1 + \frac{\log(17)}{\log(2)} = 5{,}09 \approx 5$$

Ahora, se calcula el valor de A:

$$A = \frac{R}{k} = 0{,}19 \approx 0{,}2$$

Los intervalos de clase tendrán una separación de 0,2.
Se empieza encontrando el primer intervalo de clase, cuyo extremo inferior es $X_{min} = 1$ y su extremo superior es:

$$X_{min} + A = 1 + 0{,}2 = 1,2$$

El primer intervalo de clase entonces es:

$$[1; 1{,}2)$$

Los demás intervalos de clase son:

$$[1{,}2; 1{,}4);\ [1{,}4; 1{,}6);\ [1{,}6; 1{,}8); [1{,}8; 2)$$

La primera clase [1;1,2) contiene 4 elementos de la muestra, luego $n_1 = 2$,
La segunda clase [1,2;1,4) contiene 5 elementos de la muestra, así $n_2 = 5$,
Las marcas de clase son el promedio de los extremos de cada clase, por ejemplo:

$$X_1 = \frac{1 + 1{,}2}{2} = 1{,}1$$

Respuesta

La tabla de frecuencias será:

Intervalo de clase	n_i	X_i
[1; 1,2)	4	1,1
[1,2; 1,4)	5	1,3
[1,4; 1,6)	3	1,5
[1,6; 1,8)	3	1,7
[1,8; 2)	2	1,9

1330. Un maestro de educación física en una unidad educativa del área rural, hizo un pesaje de sus estudiantes, obteniendo los resultados de la tabla. Se pide elaborar una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Peso (kg)	N° de estudiantes
[51,5; 56,5)	8
[56,5; 61,5)	7
[61,5; 66,5)	10
[66,5; 71,5)	8
[71,5; 76,5)	10
[76,5; 81,5)	7

Resolución

Se calculan las frecuencias relativas, reemplazando datos con $n = 50$:

$$f_1 = \frac{8}{50};\ f_2 = \frac{7}{50};\ f_3 = \frac{10}{50};\ f_4 = \frac{8}{50};\ f_5 = \frac{10}{50};\ f_6 = \frac{7}{50}$$

Datos

$n_1 = 8$

$n_2 = 7$

$n_3 = 10$

$n_4 = 8$

$n_5 = 10$

$n_6 = 7$

Respuesta

Añadiendo una columna con los valores de las frecuencias relativas:

Peso (kg)	n_i	f_i
$[51{,}5;\ 56{,}5)$	8	$0,16$
$[56{,}5;\ 61{,}5)$	7	$0,14$
$[61{,}5;\ 66{,}5)$	10	0,2
$[66{,}5;\ 71{,}5)$	8	$0,16$
$[71{,}5;\ 76{,}5)$	10	0,2
$[76{,}5;\ 81{,}5)$	7	$0,14$

1331. La cantidad de tiempo que dedican a resolver problemas de matemática, tres grupos de jóvenes de 4º, 5º y 6º de secundaria, se muestra en la siguiente tabla:

CURSO	Intervalos de clase (en minutos):				
	$[0,15)$	$[15,30)$	$[30,45)$	$[45,60)$	$[60,75)$
4° secundaria	8	3	4	7	10
5° secundaria	10	5	6	4	6
6° secundaria	12	3	4	8	3
	Cantidad de estudiantes				

Interpretar la información a través de un histograma de frecuencias.

Resolución

Se procede a extraer la información de la tabla para poder realizar la gráfica general:

Para 4º de secundaria:

Intervalo de clase	[0,15)	[15,30)	[30,45)	[45,60)	[60,75)
Cantidad de estudiantes: 4to de secundaria	8	3	4	7	10

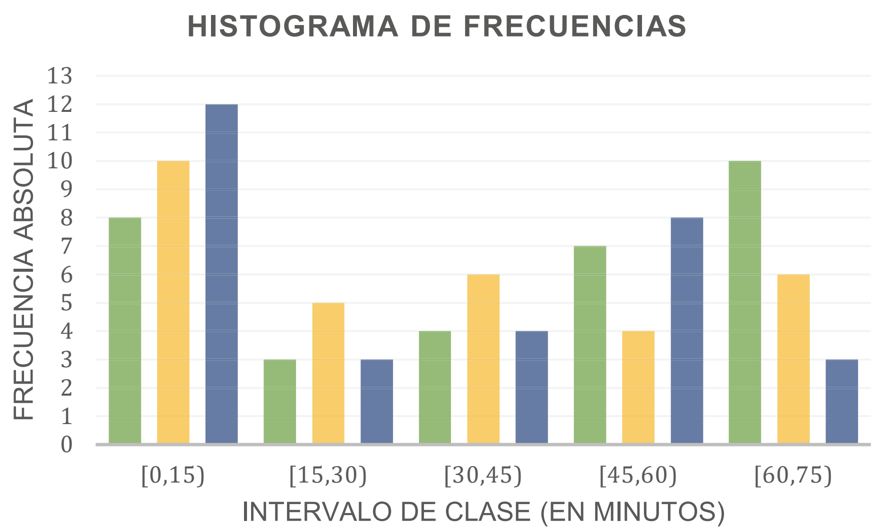
Para 5º de secundaria:

Intervalo de clase	[0,15)	[15,30)	[30,45)	[45,60)	[60,75)
Cantidad de estudiantes: 5to de secundaria	10	5	6	4	6

Para 6º de secundaria:

Intervalo de clase	[0,15)	[15,30)	[30,45)	[45,60)	[60,75)
Cantidad de estudiantes: 5to de secundaria	12	3	4	8	3

Así, el histograma que reúne toda la información de la tabla del enunciado es:



■ Cantidad de estudiantes: 4to de secundaria

■ Cantidad de estudiantes: 5to de secundaria

■ Cantidad de estudiantes: 6to de secundaria

Respuesta

El histograma de frecuencias de 4° de secundaria muestra una mayor inversión de tiempo a esta actividad, mientras que los histogramas de 5° y 6° de secundaria se evidencia menor dedicación a esta actividad.

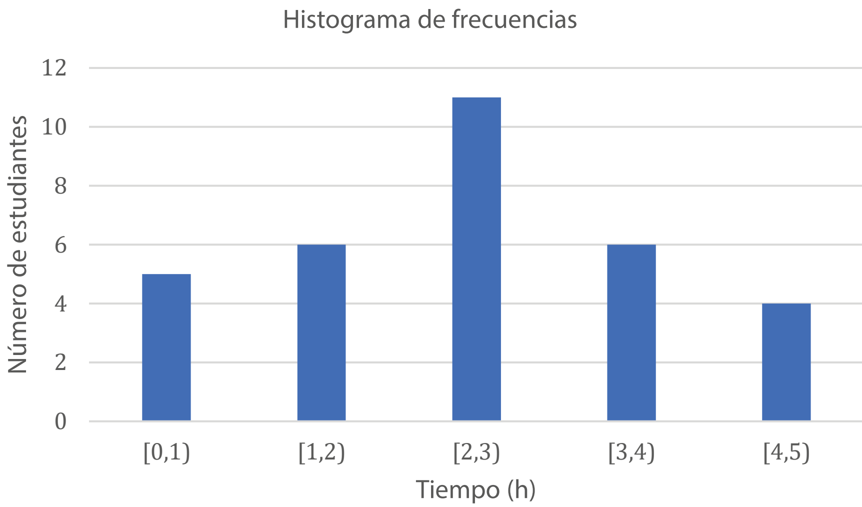
1332. Adriana tuvo que realizar una encuesta a sus compañeros de colegio, sobre el tiempo diario que pasaban ayudando en labores de casa. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla.

Interpretar la información a través de un histograma de frecuencias.

Tiempo (h)	$N°$
[0,1)	5
[1,2)	6
[2,3)	11
[3,4)	6
[4,5)	4

Resolución

A continuación, se presenta un histograma de frecuencias para los datos de la tabla:



Respuesta

El intervalo de tiempo en el que los estudiantes ayudan en labores de casa es de 2 a 3 horas, según el histograma.

1333. Una sucursal de ropas registró el número de calzado de cada comprador del día en la tabla.

Interpretar la información a través de un diagrama de sectores.

Talla	N° de compradores
[25,30)	7
[30,35)	6
[35,40)	11
[40,45)	6

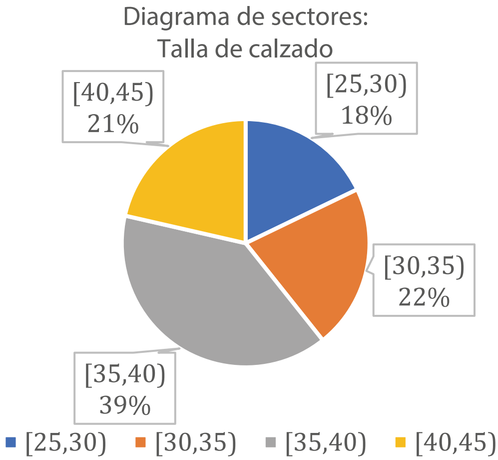
Resolución

El total de elementos de la muestra es $n = 30$ y la amplitud de cada dato es:

$$N = \frac{360°}{30} = 12°$$

(Amplitud de la porción de sector en el diagrama).

Con esto, el diagrama de sectores correspondiente a la tabla es:



Respuesta

Los números de calzado más frecuentes registrados en la muestra varían de 35 a 39.

Producción (t)	n_i
[100,200)	12
[200, 300)	8
[300,400)	9
[400,500)	11

1334. En una región agrícola del país, se recopilaron datos sobre la producción en toneladas (t) de maíz por hectárea en diferentes zonas. Se pide mostrar las frecuencias relativas, calcular la media de la producción de maíz por hectárea e interpretar los datos a través de un diagrama de sectores.

Resolución

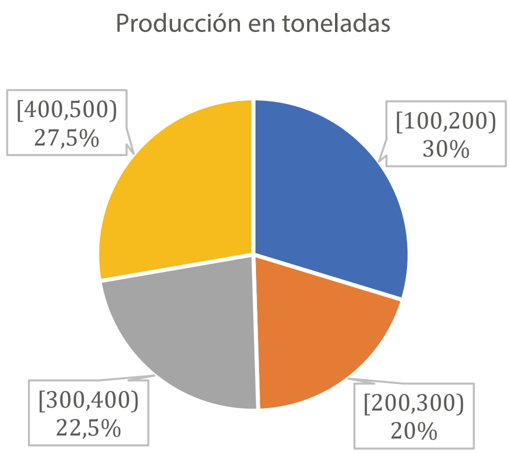
Se procede a mostrar la tabla con las frecuencias absolutas y relativas, donde $n = 40$:

Intervalo de clase	Marca de clase(X_i)	$n_i \cdot X_i$	n_i	$f_i = \frac{n_i}{40}$	$\%f_i$
[100,200)	150	1800	12	0,3	30
[200,300)	250	2000	8	0,2	20
[300,400)	350	3150	9	0,225	22,5
[400,500)	450	4950	11	0,275	27,5
	TOTAL	11 900	40	1	100%

El promedio es:

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i \cdot X_i}{n} = \frac{11\,900}{40} = 297,5$$

La amplitud del diagrama de sectores es $\frac{360°}{40} = 90°$.



Respuesta

El promedio es $\bar{X} = 297,5$ t.
Las cantidades de producción más frecuentes están entre 100 a 200 toneladas, lo cual corresponde al 30% de la producción.

1335. Elias lee el siguiente reporte en una web de noticias nacional:
"Un estudio sobre el IPC (Índice de Precios al Consumidor) en los principales municipios del país (ver tabla)".
Se pide calcular la mediana del IPC.

IPC	n_i
$[100,120)$	8
$[120,140)$	12
$[140,160)$	10
$[160,180)$	5

Resolución

Dato importante

L: Límite inferior de clase

$L([120,140)) = 120$

N_{ant}: Frecuencia acumulada de la clase anterior que contiene a la mediana.

n_{Me}: Frecuencia absoluta correspondiente a la clase que contiene a la mediana.

Completamos la tabla con las frecuencias absolutas acumuladas

IPC	n_i	N_i
$[100,120)$	8	8
$[120,140)$	12	20
$[140,160)$	10	30
$[160,180)$	5	35
	$n = 35$	

La posición de la mediana es:

$$\frac{35+1}{2} = 18$$

y también $N_{ant} = 8$ y $n_{Me} = 12$. El intervalo de clase que la contiene es $[120,140)$.

Reemplazando datos en la fórmula del cálculo de la mediana:

$$Me = L + \left(\frac{\frac{n+1}{2} - N_{ant}}{n_{Me}}\right) \cdot A = 120 + \left(\frac{\frac{35+1}{2} - 8}{12}\right) \cdot 10 = 128{,}3$$

Respuesta

La mediana del IPC es $Me = 128{,}3$.

1336. Ramón ve las noticias por un mes, con el fin de encontrar la moda de las temperaturas máximas de los reportes meridianos en la tabla.

Temperatura (°C)	n_i
[0,7)	20
[7,14)	6
[14,21)	3
[21,28)	2

Resolución

De la tabla, $n_{Mo} = n_1 = 20$ y $L = 0$. Luego reemplazando estos datos en la fórmula para calcular la moda:

$$Mo = L + \left(\frac{n_{Mo} - n_{Mo+1}}{2 \cdot n_{Mo} - n_{Mo+1}}\right) \cdot A$$

$$= 0 + \left(\frac{20 - 6}{2 \cdot 20 - 6}\right) \cdot 7 \approx 2{,}88$$

Dato importante

$n_{Mo} = \max\{n_i\}$

n_{Mo+1}: frecuencia absoluta de la clase inmediata que sigue a la que contiene a la moda.

Respuesta

La moda aproximadamente es 2,88 °C.

1337. Augusto observa un estudio psicológico en la siguiente tabla que muestra el nivel de humor de 5 personas con valores de 0 a 1:

Nombre	Juana	Ariel	Marcos	Lucas	Juan
Humor (0: malo, 1:bueno)	0,1	0,5	0,3	0,8	0,9

Encuentre las clases (subdivisión de intervalos) que dividen el intervalo 0-1 y asigne un nombre adecuado para cada clase.

Resolución

La amplitud es $A = \frac{R}{1+\frac{\log(5)}{\log(2)}} = 0{,}30$ aplicando la regla de Sturges. Luego $A = 0{,}30$ se debe sumar X_{min}:

$$0{,}30 + X_{min} = 0{,}30 + 0 = 0{,}30$$

La primera clase será: $[0; 0{,}30)$.

Sumamos $0{,}30 + 0{,}30 = 0{,}60$

La segunda clase será: [0,30; 0,60) y del mismo modo la tercera clase será [0,60; 1)

Respuesta

Las clases que dividen el intervalo son:

[0; 0,30), [0,30; 0,60), [0,60; 1)

El primer intervalo de clase corresponde a "de mal humor – algo de mal humor".
El segundo intervalo de clase corresponde a "algo de mal humor - algo de buen humor".
El tercer intervalo de clase se corresponde a "algo de buen humor – de buen humor".

1338. La escala de incertidumbre de una persona se puede clasificar otorgando el valor 0 a un estado de total indecisión y 1 a lo contrario. ¿Cuál es el valor de k en la fórmula de Sturges, que permite dividir el intervalo de incertidumbre [0,1)?

Resolución

Calculamos el rango $R = Xmax - X_{min} = 1 - 0 = 1$.
Reemplazamos los datos en la fórmula de Sturges:

$$k = 1 + \frac{\log(n)}{\log(2)} = 1 + \frac{\log(5)}{\log(2)} = 3{,}32$$

Utilizar los valores de k y R, para calcular la amplitud A:

$$A = \frac{R}{k} = \frac{1}{3{,}32} = 0{,}30$$

Respuesta

El valor de k es 3,32 y la amplitud A es igual a 0,30.

1339. Los ingresos mensuales promedio de 105 familias en la ciudad se muestran mediante una tabla, por una empresa encuestadora.
Hallar la desviación media de los ingresos mensuales.

Ingresos (en miles de bolivianos)	n_i
[0,1)	50
[1,5)	20
[5,10)	15
[10,15)	12
[15,20)	8

Resolución

Se procede a tabular la información:

Ingresos (en miles)	Marca de clase (X_i)	n_i	$\bar{X} = \frac{\sum X_i \cdot n_i}{n}$	$D_{\bar{X}} = \frac{\sum \lvert X_i - \bar{X} \rvert \cdot n_i}{n}$
[0,1)	0,5	50	25	46,2
[1,5)	3	20	60	0,6
[5,10)	7,5	15	112,5	1,1
[10,15)	12,5	12	150	1,4
[15,20)	17,5	8	140	1,3
	TOTAL	105	$\bar{X} = 97,5$	$D_{\bar{X}} = 10,1$

Respuesta

La desviación media es 10,1.

1340. El consumo de energía eléctrica promedio de 35 viviendas viene detallado en la tabla: Se pide calcular el tercer cuartil del consumo de energía e interpretar su resultado.

Consumo (kWh) en miles	n_i	N_i
[10,20)	8	8
[20,30)	12	20
[30,40)	10	30
[40,50)	5	35

Resolución

El tercer cuartil Q_3 representa el 75% de los datos.

Ya que 75% de 35 es casi 26,25; Q_3 está en el intervalo de clase [30,40).

De la tabla : $L = 30$, $N_{ant} = N_2 = 20$, $h = 10$, $n_3 = 10$.

Los cuales reemplazamos en la fórmula del cálculo del tercer cuartil Q_3:

Datos

$k = 3$;

h: amplitud de la clase que contiene al cuantil.

$h = 10$

$n = 35$

Incógnita:

Q_3: Tercer cuartil de la muestra

$$Q_3 = 30 + \left(\frac{35 \cdot \frac{3}{4} - 20}{10}\right) \cdot 10 = 32{,}5$$

Respuesta

Un 75% de las viviendas (o sea casi 26 viviendas) consumen según los datos entre 10 kWh y 32,5 kWh.

Consumo (unidades)	n_i
[0,2)	8
[2,4)	12
[4,6)	10
[6,8)	5

1341. Una unidad educativa lleva un registro sobre el consumo semanal de productos con azúcar blanca de sus estudiantes en el recreo (ver tabla).Se pide calcular la varianza y la desviación estándar del consumo semanal.

Resolución

Se procede a tabular la información:

Unidades	n_i	Marca de clase (X_i)	$\bar{X} = \frac{\sum X_i \cdot n_i}{n}$	$V = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2 \cdot n_i}{n}$
[0,2)	8	1	8	57,92
[2,4)	12	3	36	5,76
[4,6)	10	5	50	17,20
[6,8)	5	7	35	54,80
TOTAL	35		$\bar{X} = 3{,}69$	$V = 3{,}87$

Respuesta

La varianza es 3,87 y la desviación estándar es de $\sigma = \sqrt{V} = 1{,}97$

1342. La tabla contiene información sobre el tiempo que pasa un grupo de 32 estudiantes de inglés practicando en su tiempo libre. Encontrar la mediana de estos datos.

Tiempo en minutos	n_i
$[10,20)$	5
$[20,30)$	8
$[30,40)$	9
$[40,50)$	7
$[50,60)$	3

Resolución

De la tabla, calculamos la mediana, ubicando su posición: $\frac{32}{2} = 16$

Luego, de la tabla $N_3 = 5 + 8 + 9 = 22$, $L = 30$, $N_2 = 13$ y reemplazamos en la fórmula para el cálculo de la mediana:

$$Me = 30 + \left(\frac{\frac{32}{2} - 13}{9}\right) \cdot 10 = 33{,}3$$

Respuesta

La mediana es aproximadamente 33,3.

Matemática financiera

1343. Joel ha decidido ahorrar parte de su mesada para comprar una computadora portátil. Si deposita 500 bolivianos en una cuenta que paga un interés simple del 3% anual, ¿cuánto tendrá después de 2 años?

Resolución

Reemplazando los datos en la fórmula del interés simple:

$$C_f = 500 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot 2) = 530$$

Datos

$C_0 = 500$
$r = 0{,}03$
$t = 2$
Incógnita:
C_f

Respuesta

Joel tendrá Bs 530 después de 2 años.

1344. Una empresa ofrece un plan de pagos para comprar equipo de seguridad personal, donde los trabajadores pueden pagar en cuotas mensuales sin intereses. Si cada uno cuesta 300 bolivianos y se decide establecer pagos en 10 cuotas mensuales, ¿cuánto es la cuota mensual por cada uniforme?

Datos

C : Cuota mensual
C_t: Costo total
$C_t = 300$ Bs
n : número de cuotas
$n = 10$
Incógnita:
C: Cuota

Resolución

Se calcula el costo de cada cuota, reemplazando datos en la fórmula:

$$C = \frac{C_t}{n} = \frac{300}{10} = 30$$

Respuesta

El pago por cuota mensual es de Bs 30.

1345. Un grupo de estudiantes está buscando financiamiento para un proyecto escolar. Si logran conseguir una inversión de 2000 bolivianos con un interés compuesto del 5% anual, ¿cuánto tendrán al cabo de 3 años?

Datos

$C_0 = 2000$ Bs
t = 3 años
r = 5% = 0,05
Incógnita:
C_f

Resolución

Reemplazando los datos, al cabo de 3 años, obtenemos:

$$C_f = 2000 \cdot (1 + 0{,}05)^3 = 2315{,}25$$

Respuesta

Se obtendrá un capital final de Bs 2315,25 al cabo de 3 años

1346. Un grupo de amigos ha decidido hacer un viaje al interior del país. Deciden aportar una cuota mensual de Bs 300 a una cuenta bancaria, con un interés compuesto del 4%. Al cabo de 2 años, ¿cuánto habrán juntado para el viaje?

Resolución

Con los datos del problema, en la fórmula del monto acumulado con interés compuesto:

$$C_f = \frac{300 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{12 \cdot 2} - 1}{\frac{0,04}{12}} = 7482,86$$

Datos

$C_0 = 300$ Bs
t = 2 años
r = 4% = 0,04
Incógnita:
C_f

Respuesta
Se habrá juntado un capital aproximado de Bs 7482,86

1347. Si una inversión inicial de 1000 bolivianos se coloca en una cuenta que paga un interés simple del 2% anual y otra inversión también de 1000 bolivianos se coloca en una cuenta que paga un interés compuesto del 2% anual, ¿cuál de las dos inversiones tendrá un mayor rendimiento después de 5 años?

Resolución

Para el interés simple, reemplazamos:

$$C_{f_1} = 1000 \cdot (1 + 0,02 \cdot 5) = 1100$$

Para el interés compuesto, reemplazamos los mismos datos:

$$C_{f_2} = 1000 \cdot (1 + 0,02)^5 = 1104,1$$

Datos

$C_0 = 1\,000$
t = 5 años
r = 2% = 0,02
Incógnita:
C_{f1}, C_{f2}

Respuesta
La segunda inversión, asociada al interés compuesto es mayor y rendirá Bs 1104,1.

1348. Si una inversión inicial de 10 000 bolivianos se coloca en una cuenta que paga un interés simple del 3% anual y otra inversión de 10 000 bolivianos se coloca en una cuenta que paga un interés compuesto del 3% anual, ¿cuál de las dos inversiones tendrá un mayor rendimiento después de 20 años?

Resolución

Para el interés simple, reemplazamos:

$$C_f = 10\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 20) = 16\,000$$

Para el interés compuesto, reemplazamos los mismos datos:

$$C_f = 10\,000 \cdot (1 + 0,03)^{20} = 18\,061,1$$

Datos

$C_0 = 10\,000$
t = 20 años
r = 3% = 0,03
Incógnita:
C_{f1}, C_{f2}

Respuesta
La segunda inversión, asociada al interés compuesto es mayor y rendirá Bs 18 061,1.

1349. Una entidad pública arrienda un bien a una empresa, valorado en Bs 500 000 con un valor residual de Bs 80 000, que debe ser pagado a con una tasa de interés del 1% mensual. Si la duración del contrato es de 5 años, ¿cuál es el importe de la cuota mensual?

Datos

P_B = 500 000
V_r = 80 000
t = 5 años
r = 1 % = 0,01

Incógnita:
P: Cantidad a financiar
C: Importe de la cuota

Resolución

Restamos del precio del bien, el valor residual, encontrando:

$$P = P_B - V_r = 500\,000 - 80\,000 = 420\,000$$

Se procede a calcular la cuota mensual:

$$C = 420\,000 \cdot \left(\frac{1}{60} + 0{,}01\right) = 11\,200$$

Respuesta
La cuota mensual es de Bs 11 200.

1350. Erasmo pagó un préstamo de Bs 7000 del banco, en 5 años. Si la tasa de interés mensual fue del 1%, ¿cuánto fue la cuota mensual?

Datos

$V_p = 7000$

t = 6 meses
i = 0,01

Incógnitas:
C: Importe de la cuota

Resolución

Reemplazando datos en la fórmula del valor presente:

$$7000 = \frac{C}{0{,}01}\left(1 - \frac{1}{(1+0{,}01)^{60}}\right)$$

Despejando *C*:

$$C = \frac{7000 \cdot 0{,}01}{(1-(1{,}01)^{-60})} = 155{,}71$$

Respuesta
La cuota mensual fue aproximadamente de Bs 155,71

Tablas de frecuencias (gráficas)

1351. Completar la tabla de distribución de frecuencias para la siguiente muestra correspondiente a los resultados de un dado lanzado 20 veces:

1, 5, 3, 2, 6, 4, 1, 6, 2, 3, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 4, 1, 6, 5.

Datos	n_i	N_i	f_i	F_i	$\%_{f_i}$

Resolución

Una vez ordenados los datos se tabula la información con $n = 20$:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6.

De la tabla, se calcula las frecuencias absolutas acumuladas N_i como sigue:

$$N_1 = 4 = n_1; N_2 = n_1 + n_2 = 4 + 3$$

$$N_3 = n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 3 + 3 + 4 = 14$$

Seguimos el proceso hasta:

$$N_6 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 20.$$

Para las frecuencias relativas acumuladas F_i utilizamos los valores de la columna f_i y similar a las frecuencias absolutas acumuladas:

$$F_1 = 0{,}2 = f_1; F_2 = f_1 + f_2 = 0{,}35$$

$$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 0{,}50$$

Seguimos el proceso hasta:

$$F_6 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 1.$$

Una forma de verificar que las frecuencias relativas acumuladas son correctas, es que la suma de todas esté cerca a 1.

Respuesta

Añadiendo la columna del porcentaje de frecuencias relativas, tabulamos toda la información:

Datos	n_i	N_i	f_i	F_i	$\%_{f_i}$
1	4	4	0,2	0,2	20
2	3	7	0,15	0,36	15
3	3	10	0,15	0,50	15
4	3	13	0,15	0,65	15
5	3	16	0,15	0,80	15
6	4	20	0,2	1,00	20
TOTAL	$n = 20$		$1,00$		100

1352. Mostrar una tabla de distribución de frecuencias para la siguiente muestra correspondiente a las faltas de ortografía de un grupo de estudiantes detectadas por la maestra de escuela al revisar sus trabajos:

1, 5, 3, 2, 6, 4, 1, 6, 2, 3, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 4, 1, 6, 5, 6, 3, 2, 1, 4.

Resolución

Con los datos ya ordenados:

1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6

se procede a mostrar la tabla, completando las celdas como en el ejercicio anterior:

Respuesta

Datos	n_i	N_i	f_i	F_i	$\%_{f_i}$
1	5	5	0,20	0,20	20
2	4	9	0,16	0,36	16
3	4	13	0,16	0,52	16
4	4	17	0,16	0,68	16
5	3	20	0,12	0,80	12
6	5	25	0,20	1,00	20
TOTAL	$n = 25$		$\sum f_i = 1$		$\sum \%_{f_i}$ =100

1353. Al momento de inscribirse, se les preguntó a 10 estudiantes sobre el número de hermanos en su familia y sus respuestas fueron: 3,4,5,8,3,7,6,4,7,3. Completar la tabla de distribución de frecuencias para conocer el mayor porcentaje que representa a esta muestra.

N ° hermanos	n_i	N_i	f_i	F_i	$\%_{f_i}$
TOTAL	**10**		**1,00**		**100**

Resolución

Ordenamos los datos:

3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8

para obtener de ellas las frecuencias absolutas y a su vez de ellas poder calcular las frecuencias absolutas acumuladas, frecuencias relativas, frecuencias relativas acumuladas y los porcentajes de las frecuencias relativas

Respuestas

La tabla de distribución de frecuencias completa de la muestra es la siguiente:

N ° hermanos	n_i	N_i	f_i	F_i	$\%_{f_i}$
3	3	3	0,30	0,30	30
4	2	5	0,20	0,50	20
5	1	6	0,10	0,60	10
6	1	7	0,10	0,70	10
7	2	9	0,20	0,90	20
8	1	10	0,10	1,00	10
TOTAL	**10**		**1,00**		**100**

El mayor porcentaje de la muestra es el 30%, es decir los estudiantes con 3 hermanos.

IDIOMA	n_i
Francés	2
Inglés	6
Español	4
Alemán	1
Ruso	2
TOTAL	15

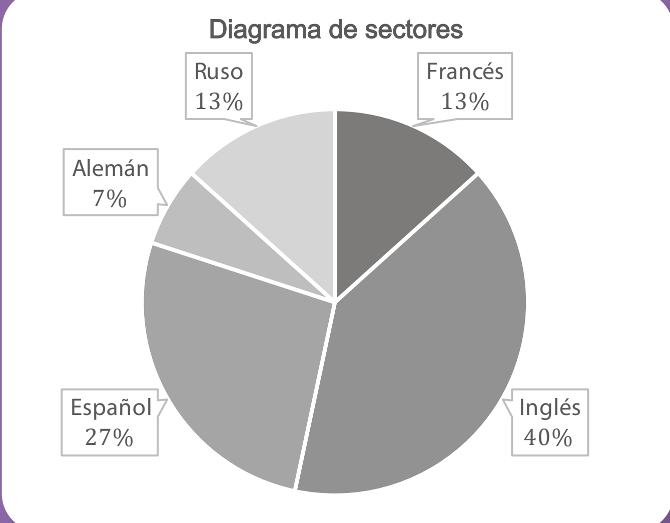
1354. En un evento internacional, los participantes hablaban los siguientes idiomas:
"francés, inglés, inglés, español, inglés, español, inglés, español, español, alemán, inglés, francés, ruso, ruso, inglés".
Complete la tabla de frecuencias absolutas a una tabla de distribución de frecuencias y elabore un diagrama de sectores.

Respuestas

Se muestra la tabla de distribución de frecuencias, sin importar el orden en que aparecen los valores de variable IDIOMA:

Idioma	n_i	N_i	f_i	F_i	$\%f_i$
Francés	2	2	0,13	0,13	13
Inglés	6	8	0,40	0,53	40
Español	4	12	0,27	0,80	27
Alemán	1	13	0,07	0,86	7
Ruso	2	15	0,13	1,00	13
TOTAL	$n = 15$		1,00		100

Luego se procede a exhibir un diagrama de sectores, con amplitud de sector $A = 24°$:



1355. Mostrar una tabla de distribución y un histograma de frecuencias con los pesos en kilogramos de una muestra de 15 atletas:

68, 68, 59, 49, 58, 51, 57, 53, 68, 54, 56, 61, 55, 68, 52

Resolución

Se ordenan los datos de la variable numérica discreta "Pesos en kilogramos":

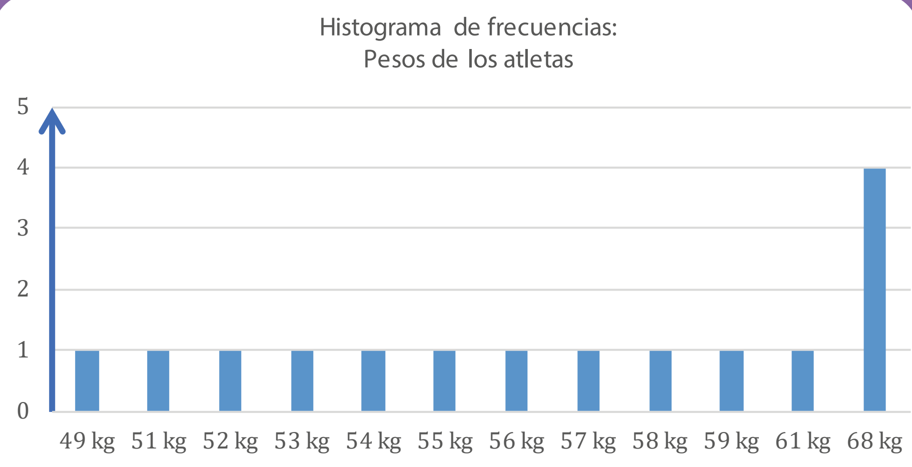
49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 68, 68, 68, 68

Respuestas

Con los datos ordenados, se muestra la tabla de distribución de frecuencias:

Peso(kg)	n_i	N_i	f_i	F_i	$\%f_i$
49	1	1	0,07	0,07	7
51	1	2	0,07	0,14	7
52	1	3	0,07	0,20	7
53	1	4	0,07	0,27	7
54	1	5	0,07	0,34	7
55	1	6	0,07	0,40	7
56	1	7	0,07	0,47	7
57	1	8	0,07	0,54	7
58	1	9	0,07	0,60	7
59	1	10	0,07	0,67	7
61	1	11	0,07	0,74	7
68	4	$\boldsymbol{n = 15}$	0,27	**1,00**	27
TOTAL	$\boldsymbol{n = 15}$		**1,00**		100%

Con la información correspondiente a los pesos y a las frecuencias absolutas n_i, se muestra el histograma de frecuencias:



1356. Las calificaciones en un examen de matemática obtenidas por un grupo de estudiantes son:

$$74, 50, 56, 90, 81, 41, 56, 67, 90, 60, 76, 76, 91, 41$$

Elabore la tabla de distribución de frecuencias y muestre un diagrama de sectores, ¿cuántos estudiantes obtuvieron menos de 76 puntos?

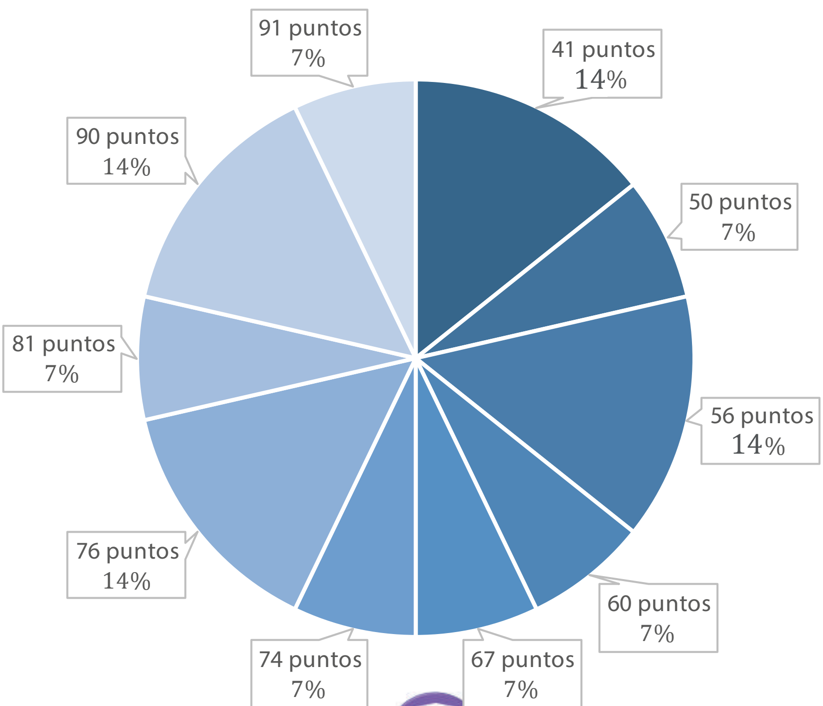
Resolución

Se procede a mostrar la tabla de distribución de frecuencias de la muestra:

Nota	n_i	N_i	f_i	F_i	$\%_{f_i}$
41	2	2	0,14	0,14	14
50	1	3	0,07	0,21	7
56	2	5	0,14	0,35	14
60	1	6	0,07	0,43	7
67	1	7	0,07	0,50	7
74	1	8	0,07	0,57	7
76	2	10	0,14	0,71	14
81	1	11	0,07	0,78	7
90	2	13	0,14	0,93	14
91	1	$\boldsymbol{n = 14}$	0,07	$\mathbf{1,00}$	7
TOTAL	$n = 14$		$1,00$		100%

Los porcentajes de las notas, corresponden a la columna $\%_{f_i}$, de modo que esta información se hará visible mediante un diagrama de sectores:

Calificaciones



Respuesta

La frecuencia absoluta $N_7 = 10$ corresponde a los estudiantes que obtuvieron notas debajo de los 76 puntos.

1357. A través de un sondeo de opinión, se ha preguntado a un grupo de 100 personas por su grado de satisfacción sobre el uso de videoconferencias en el trabajo. Mostrar la tabla de distribución de frecuencias completa y un histograma de frecuencias.

Respuestas	N° de personas
Muy insatisfecho	15
Insatisfecho	25
Normal	28
Satisfecho	20
Muy Satisfecho	12

Respuesta

La tabla de distribución de frecuencias completad de la muestra es:

Respuesta	n_i	N_i	f_i	F_i	$\%_{f_i}$
Muy insatisfecho	15	15	0,15	0,15	15
Insatisfecho	25	40	0,25	0,40	25
Normal	28	68	0,28	0,68	28
Satisfecho	20	88	0,20	0,88	20
Muy satisfecho	12	$n = 100$	0,12	$1,00$	12
TOTAL	$n = 100$		$1,00$		100%

El histograma de frecuencias correspondiente a la variable "Respuesta" y a las frecuencias absolutas es:

Medidas de tendencia central

1358. Los tiempos promedio en horas de estudio diario de lunes a sábado de Yandira son:

$$4, 2, 6, 1, 3, 5$$

¿Cuál es la suma de la mediana y el promedio?

Resolución

Se procede a calcular los valores:

Mediana:

Se ordenan los datos:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Hay n = 6 datos.

La posición de la mediana Me está entre 3 y 4, luego:

$$Me = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$$

Promedio:

$$\bar{X} = \frac{4+2+6+1+3+5}{6}$$

$$= 3{,}5$$

Respuesta

La suma que se pide es:

$$3{,}5 + 3{,}5 = 7$$

1359. Las calificaciones en una prueba escrita obtenidas por un grupo de estudiantes son:

$$74, 56, 90, 81, 41, 56, 67, 90, 60, 76, 76, 91, 41$$

Se pide encontrar la suma de la mediana, la media aritmética y la moda de la muestra.

A partir de los datos de la muestra, se calculan los 3 valores:

Mediana:

Con los datos ordenados:

$41, 41, 56, 56, 60, 67, 74$

$76, 76, 81, 90, 90, 91$

y una cantidad de n = 13 datos, la mediana es Me = 74.

Promedio: $\bar{X} = 69{,}15$

Moda:

Esta muestra tiene 4 modas:

$$Mo_1 = 41, Mo_2 = 56$$

$$Mo_3 = 76, Mo_4 = 90$$

Respuesta

La suma buscada es:

$$Me + \bar{X} + Mo_1 + Mo_2 + Mo_3 + Mo_4 = 74 + 63{,}3 + 41 + 56 + 76 + 90 = 406{,}15$$

1360. Considere la siguiente muestra:

$$a, 14, 15, 19, 20, b$$

Sabiendo que $\bar{X} = 13$ y $\dfrac{b-a}{2} = 17$, hallar los valores de a y b.

Resolución

Se calcula la media aritmética:

$$\bar{X} = \frac{a + 14 + 15 + 19 + 20 + b}{6} = 13$$

Entonces $a + b = 10$ y $b - a = 34$.

Respuesta

Resolviendo el sistema, $b = 22$ y $a = -12$.

1361. Dada la siguiente muestra:

$$2, 3, 5, 7, 8$$

se pide determinar los valores de a, b, c, d para que la siguiente muestra:

$$2 + a, 3 + b, 5 + c, 2 + d, 8$$

tenga una moda igual a 8 y frecuencia absoluta igual a 5.

Resolución

Ya que la muestra debe tener moda igual a 8 y frecuencia absoluta igual a 5:
Hallamos los valores de a, b, c y d:

- $a + 2 = 8$, luego $a = 6$.
- $3 + b = 8$, luego $b = 5$.
- $5 + c = 8$, luego $c = 3$.
- $d + 2 = 8$, luego $d = 6$.

Respuesta

La muestra queda 8, 8, 8, 8, 8, que cumple $Mo = 8$ y $n_{Mo} = 5$.

1362. Una carretera interprovincial entre el pueblo A y el pueblo B, contiene 4 paradas. La parada 1 se encuentra a 20 km del pueblo A, la parada 2 está a 30 km, la parada 3 a 70 km, la parada 4 a 110 km y a 220 km encontramos al pueblo B. Encuentre la distancia y la desviación media entre paradas.

Datos

$d(A, B)$: distancia del pueblo A al pueblo B

$d(P_i, P_j)$: distancia de la parada P_i a la parada P_j

$d(A,P_1) = 20$

$d(A,P_2) = 30$

$d(A,P_3) = 70$

$d(A,P_4) = 110$

$d(A,B) = 220$

Resolución

Las distancias entre paradas son:

$$d(P_2,P_1) = d(A,P_2) - d(A,P_1) = 10$$

$$d(P_2,P_3) = d(A,P_3) - d(A,P_2) = 40$$

$$d(P_3,P_4) = d(A,P_2) - d(A,P_1) = 40$$

$$d(P_4,B) = d(A,P_2) - d(A,P_1) = 110$$

El promedio de estas distancias es:

$$\bar{X} = \frac{10 + 40 + 40 + 110}{4} = 50$$

La desviación $D_{\bar{X}}$ vale:

$$D_{\bar{X}} = \frac{|10-50| + |40-50| + |40-50| + |110-50|}{4} = 30$$

Respuesta

La distancia media entre paradas es 50 km, con una desviación media de 30 km.

1363. Encontrar la mediana, la media, la moda y la desviación de la siguiente muestra al lanzar 16 veces un dado:

3, 4, 5, 3, 6, 3, 4, 5, 6, 6, 3, 6, 2, 1, 4, 1

Resolución

Media

Tabulando los datos:

Cara x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$
1	2	2
2	1	2
3	4	12
4	3	12
5	2	10
6	4	24
	$n = 16$	**62**

Luego:

$$\bar{X} = \frac{62}{16} = 3{,}86$$

Desviación media

$\lvert x_i - \bar{X} \rvert \cdot n_i$
5,72
1,86
3,44
0,42
2,28
8,56
22,28

El valor 22,28 es la suma de los valores de la columna, luego: $D_{\bar{X}} = \dfrac{22{,}28}{16} = 1{,}39$

Mediana y moda

Ordenamos los datos crecientemente:

$$1, 1, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6$$

Como $n = 16$, su posición corresponde a $\frac{16}{2} = 8$:

$$Me = \frac{4+4}{2} = 4$$

De la tabla, n_6 y n_3 son los valores más altos entre las frecuencias absolutas, así:

$$Mo_1 = 3 \text{ y } Mo_2 = 6$$

Respuesta

La media es 3,86, las modas son 3 y 6 y la desviación media es 1,39.

1364. Los tiempos promedio de 50 atletas se detallan en la tabla. El entrenador, con el propósito obtener medallas, debe estudiar los datos hallando la media, la mediana, la moda y la desviación media.

Tiempo del atleta (s)	n_i
8,3	17
9,8	13
7,5	8
7,3	7
7,7	5
TOTAL	50

Resolución

Moda

La clase modal corresponde a 8,3 s, luego: $Mo = 8{,}3$ s.

Media

Tabulando los datos:

Tiempo del atleta (s)	n_i	$n_i \cdot x_i$
8,3	17	141,1
9,8	13	127,4
7,5	8	60
7,3	7	51,1
7,7	5	38,5
TOTAL	n = 50	418,1

Luego:

$$\bar{X} = \frac{418{,}1}{50} = 8{,}36$$

Desviación media

Para calcular este valor tabulamos los datos y las frecuencias absolutas

$\lvert x_i - \bar{X} \rvert \cdot n_i$
1,7
18,2
7,2
7,7
3,5
38,3

El valor 38,3 es la suma de los valores de la columna, luego:

$$D_{\bar{X}} = \frac{38{,}3}{50} = 0{,}77$$

Respuesta
La media es igual a 8,36 s, la moda es 8,3 s y la desviación es 0,77 s (los tiempos están cercanos a 8,4 s)

Medidas de Dispersión

1365. Los promedios anuales en las calificaciones de Rita, de primero a quinto de secundaria son:

$$89, 70, 90, 83, 89$$

respectivamente.

Los promedios anuales de las calificaciones de Joaquín, de primero a quinto de secundaria son:

$$85, 86, 88, 66, 79$$

Si ambos postulan a una beca, ¿a cuál de ellos seleccionaría el examinador?

Resolución

Sean $\bar{X}_{R,}$ V_R, σ_R, CV_R,$\bar{X}_J$,V_J,σ_J, CV_J los valores de la media, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación de las calificaciones de Rita y Joaquín, respectivamente.

Para Rita:

$$\bar{X}_R = 84, V_R = 88,6,\ \sigma_R = \sqrt{V_R} = \sqrt{88,6} \approx 9,41$$

Donde:

$$CV_R = \frac{9,41}{|84|} = 0,11 = 11\%.$$

Para Joaquín:

$$\bar{X}_J = 80,6;\ V_J = 63,8;\ \sigma_R = \sqrt{V_J} = 7,9$$

Donde:

$$CV_J = \frac{7,9}{|80,6|} \approx 0,09 = 9\%.$$

Respuesta
Si bien Joaquín tiene un promedio menor que el de Rita, sus calificaciones aparecen menos dispersas (el examinador quizás se incline por un rendimiento académico uniforme a largo plazo).

1366. ¿Cuál es la varianza y la desviación estándar en los primeros 10 números de Fibonacci?

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

Resolución

Tabulamos la información, con $n = 10$ para calcular el promedio, la varianza y la desviación estandar:

x_i	n_i	$n_i(x_i - \bar{X})^2$
1	2	353,78
2	1	151,29
3	1	127,69
5	1	86,49
8	1	39,69
13	1	1,69
21	1	44,89
34	1	388,09
55	1	1656,49
$\bar{X} = 14{,}3$	$n = 10$	Total=2850,1

Luego: $V = \frac{2850{,}1}{10} = 285{,}01$ y $\sigma = \sqrt{285{,}01} = 16{,}88$.

Respuesta
La varianza es de 285,01 y la desviación estándar es de 16,88.

1367. En la tabla, se detallan las ganancias semanales promedio de los mercados populares de cada zona de cierta región. Tabulando datos, se pide encontrar la varianza, desviación estándar, coeficiente de variación e interpretar el resultado.

Zona	Ganancia (en miles)	n_i
Zona A	Bs 100	5
Zona B	Bs 120	6
Zona C	Bs 150	2
Zona D	Bs 180	2
Zona E	Bs 200	4
Zona F	Bs 230	8
Zona G	Bs 250	4

Resolución

De la tabla encontramos la cantidad de mercados en la región $n = 31$.

Extendemos la tabla con los cálculos necesarios para encontrar la varianza:

ZONA	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
Zona A	100	5	500	10 000	50 000
Zona B	120	6	720	14 400	86 400
Zona C	150	2	300	22 500	45 000
Zona D	180	2	360	32 400	64 800
Zona E	200	4	800	40 000	160 000
Zona F	230	8	1840	52 900	423 200
Zona G	250	4	1000	62 500	250 000
TOTAL		31	5520		1 079 400

La media aritmética es $\bar{X} = \frac{5520}{31} = 178{,}06$.

La varianza es $V = \frac{1\,079\,400}{31} - (178{,}06)^2 = 3113{,}99$.

La desviación estándar es $\sigma = \sqrt{3113{,}99} = 55{,}80$.

El coeficiente de variación es $CV = \frac{55{,}80}{178{,}06} = 0{,}31 = 31\%$.

Respuesta

Con un coeficiente de variación de 31%, los valores de las ganancias están muy dispersas.

1368. El tiempo que los estudiantes de 2º de secundaria tardan en llegar desde casa a su unidad educativa por la mañana se presenta en la tabla.

Tiempo (min)	N° de estudiantes
5	3
10	7
15	10
20	17
25	3

Se requiere calcular los valores de la media y la desviación estándar, exhibiendo una tabla de los datos. Posteriormente, se debe interpretar los resultados.

Resolución

Para un total de $n = 40$ estudiantes, la tabla que ayuda con los cálculos es:

Tiempo x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
5	3	15	25	75
10	7	70	100	700
15	10	150	225	2250
20	17	340	400	6800
25	3	75	625	1875
TOTAL	$n = 40$	650		11 700

La media aritmética es $\bar{X} = \frac{650}{40} = 16{,}25$.

La varianza es $V = \frac{11\ 700}{40} - (16{,}25)^2 = 28{,}44$.

La desviación estándar es $\sigma = \sqrt{28{,}44} = 5{,}33$.

El coeficiente de variación es $CV = \frac{5{,}33}{16{,}25} \approx 0{,}33 = 33\%$.

Respuesta

Los tiempos están dispersos, ya que $CV > 30\%$.

1369. Dada la siguiente muestra:

4, 7, 8, 8, 9, 6, 5, 7, 8, 4, 6, 2, 3, 5, 4, 8, 9, 6, 7

Se pide calcular la varianza utilizando las dos fórmulas conocidas $V = \sum \frac{n_i \cdot (x_i - \bar{X})^2}{n}$ y $V = \sum \frac{n_i \cdot x_i^2}{n} - \bar{X}^2$.

¿Existe alguna diferencia en los resultados?

Resolución

Ordenamos la muestra:

2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9

La siguiente tabla ayuda en los cálculos para la media y la varianza, utilizando la primera fórmula:

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
2	1	2	4	4
3	1	3	9	9
4	3	12	16	48
5	2	10	25	50
6	3	18	36	108
7	3	21	49	147
8	4	32	64	256
9	2	18	81	162
TOTAL	$n = 19$	116		784

La varianza es $V = \frac{784}{19} - \left(\frac{116}{19}\right)^2 = 3{,}99$. Donde la media es $\bar{X} = \frac{116}{19} = 6{,}11$

x_i	n_i	$(x_i - \bar{X})^2$
2	1	16,8
3	1	9,6
4	3	13,2
5	2	2,4
6	3	0,0
7	3	2,4
8	4	14,4
9	2	16,8
TOTAL	19	75,8

Ahora, la tabla a la izquierda corresponde a los cálculos para la media y la varianza, utilizando la segunda fórmula.

La varianza será $V = \frac{75{,}8}{19} = 3{,}99$.

Respuesta
No existe diferencia en los resultados, en este ejemplo ambas fórmulas de la varianza conducen al mismo resultado.

1370. Juan anota los ingresos semanales por la venta de 5 artículos, ¿a qué conclusión llegaría al calcular el coeficiente de variación de la variable ingresos?

Artículo	Celulares	Cargadores	Pantallas	Cables	Otros
Ingresos (Bs)	1200	100	500	20	60

Resolución
El promedio de ingresos es:

$$\bar{X} = \frac{1200 + 100 + 500 + 20 + 60}{5} = 376$$

La varianza será:

$$V = \frac{\begin{array}{c}(1200 - 376)^2 + (100 - 376)^2 + (500 - 376)^2 \\ +(20 - 376)^2 + (60 - 376)^2\end{array}}{5} = 199\,424$$

y su desviación estándar: $\sigma = 446{,}6$ y $CV = 118\%$.

Respuesta
El coeficiente de variación es muy alto (mayor a 30%); es decir, los valores de los ingresos están muy dispersos.

1371. Laura deja sin completar su tarea de estadística. La información es:

x_i	1	2	3	4	5
$n_i \cdot x_i$	1200	100	600	20	60

Encontrar la varianza tabulando los datos.

Resolución

De la tabla incompleta encontramos las frecuencias:

$n_1 \cdot x_1 = 1200$, entonces $n_1 = 1200$.

De manera similar se encuentran las demás frecuencias absolutas:

$$n_2 = 50,\ n_3 = 200,\ n_4 = 5,\ n_5 = 12.$$

Para el cálculo de la varianza, procedemos a completar una tabla con los valores de las frecuencias, junto con otras expresiones que intervienen en el cálculo de la misma:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
1	1200	1200	1	1200
2	50	100	4	200
3	200	600	9	1800
4	5	20	16	80
5	12	60	25	300
TOTAL	**1467**	**1980**		3580

Luego $V = \dfrac{3580}{1467} - \left(\dfrac{1980}{1467}\right)^2 = 0{,}61$

Respuesta

La varianza de los datos es de 0,61.

Regresión lineal

1372. Los asientos disponibles en las clases de Matemática y Economía se ven en la siguiente tabla:

QMC x_i	2	3	4	5	6	6	7	7
ECO y_i	1	3	2	4	4	4	6	4

Encontrar la covarianza de los datos.

Resolución

Tabulamos la información con $n = 8$, con el fin de obtener los valores de los productos de los respectivos x_i y y_i para el cálculo de la covarianza:

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$
2	1	2
3	3	9
4	2	8
5	4	20
6	4	24
6	4	24
7	6	42
7	4	28
40	**28**	**157**

La última fila de la tabla a la izquierda contiene las sumas de los valores de columnas, necesarios para el cálculo de la covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{8} - \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

$$= \frac{157}{8} - \frac{40}{8} \cdot \frac{28}{8} = 2{,}13$$

Respuesta

La covarianza de los datos es de 2,13.

1373. Sean x_i, y_i las variables que representan los promedios de 8 estudiantes de la escuela A y de la escuela B respectivamente.

Clase A (x_i)	67,5	71	73,4	80	60	90	81	78,9
Clase B (y_i)	70	86,4	60,4	74,3	65	80	70	63

Encontrar la ecuación de la recta de regresión, eligiendo a algunas de las variables como la dependiente.

Resolución

Tomamos a x_i como la variable independiente y a y_i como la variable dependiente. Al tabular la información, obtendremos la siguiente tabla, junto con los cálculos para la varianza y la covarianza.

La última fila representa las sumas de los valores de las columnas, que serán necesarias para los cálculos correspondientes.

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
67,5	70	4725	4556,3	4900
71	86,4	6134,4	5041	7464,9
73,4	60,4	4433,36	5387,6	3648,2
80	74,3	5944	6400	5520,5
60	65	3900	3600	4225
90	80	7200	8100	6400
81	70	5670	6561	4900
78,9	63	4970,7	6225,2	3969
601, 8	**569, 1**	**42977, 5**	**45871**	**41027, 6**

La varianza que se utilizará es:

$$V_x = \sigma_x^2 = \frac{45\,871}{8} - (\bar{X})^2 = 45\,871 - \left(\frac{601{,}8}{8}\right)^2 = 75{,}07$$

La covarianza es $\sigma_{xy} = \dfrac{42\,977{,}5}{8} - \bar{X} \cdot \bar{Y} = \dfrac{42\,977{,}5}{8} - 75{,}29 \cdot 71{,}14 = 20{,}56$

Reemplazamos los valores recién hallados en la fórmula de la recta de regresión:

$$y - 71{,}14 = \frac{20{,}56}{75{,}07}(x - 75{,}29) = 0{,}27 \cdot (x - 75{,}29)$$

Respuesta

La ecuación de la recta de regresión para este ejemplo queda:

$$y = 0{,}27x + 50{,}81$$

1374. Dada siguiente tabla de doble entrada, encuentre la muestra de datos correspondiente.

(y_i) \ (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	Total
50	1		1					2
51		1						1
60				1				1
70					1			1
90						1	1	2
Total	1	1	1	1	1	1	1	$n = 7$

Resolución

Elegimos $x_1 = 1$ y vemos que aparece asociado solo con $y_1 = 50$.
Se procede de la misma forma para los demás x_i y se completa la tabla que contendrá los datos de la muestra.

Respuesta

Los datos de donde proviene la tabla de doble entrada son:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	50	51	50	60	70	90	90

1375. Para la siguiente tabla de datos se pide:

x_i	1	2	2	3	3	5	5	7	7	7	8	8	9
y_i	1	1	8	8	7	7	7	7	3	3	2	6	10

a) Mostrar su correspondiente tabla de doble entrada.
b) A partir de la tabla del anterior inciso, mostrar las tablas marginales para ambas variables..

Respuestas

a) Con x_i e y_i las variables independiente y dependiente, respectivamente, su tabla de doble entrada correspondiente es:

(y_i) \ (x_i)	1	2	3	5	7	8	9	Total
1	1	1						2
2						1		1
3					2			2
6						1		1
7			1	2	1			4
8		1	1					2
10							1	1
Total	1	2	2	2	3	2	1	**13**

b) Con las tablas marginales, obtenemos las tablas de frecuencias absolutas de cada una de las variables:

x_i	1	2	3	5	7	8	9
n_i	1	2	2	2	3	2	1

y_i	1	2	3	6	7	8	10
n_i	2	1	2	1	4	2	1

1376. Dadas las siguientes tablas de datos:

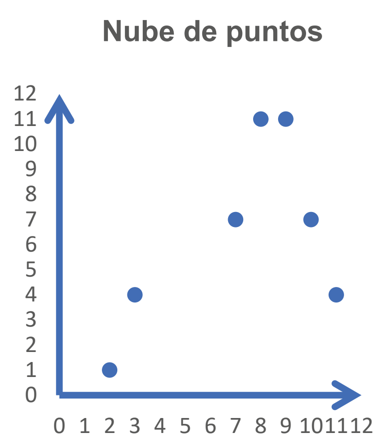
x_i	2	3	7	8	9	10	11
y_i	1	4	7	11	11	7	4

w_i	2	3	7	8	9	10	11
z_i	4	9	16	24	30	34	38

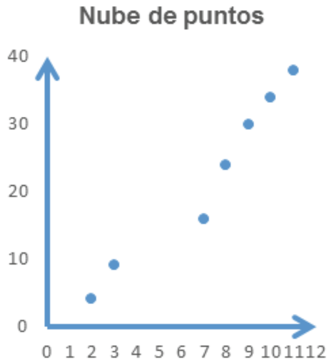
Elaborar sus respectivas nubes de puntos y estudiar su correlación.

Resolución

La nube de puntos correspondiente a la primera muestra x_i, y_i es:



La nube de puntos correspondiente a la primera muestra w_i, z_i es:



Respuesta

La nube correspondiente a los x_i, y_i se dispersa de una recta, luego su correlación es débil, mientras que los datos de la segunda tabla w_i, z_i están más cercanos a una recta creciente de izquierda a derecha, luego su correlación es fuerte.

1377. El flujo vehicular de una avenida desde las 6 am, se detalla en la siguiente tabla:

Tiempo (h)	2	3	7	8	9	10	11
Autos	4	9	16	24	30	34	38

Encuentre la recta de regresión para estimar la hora en la cual la cantidad de vehículos es 70 y muestre un gráfico de dicha recta.

Resolución

En la siguiente tabla se muestra la información del registro del flujo vehicular, junto con los valores para el cálculo de la varianza y la covarianza, con variable "Autos" siendo la variable dependiente del tiempo en horas.

Tiempo (x_i)	Autos (y_i)	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
2	4	8	4
3	9	27	9
7	16	112	49
8	24	192	64
9	30	270	81
10	34	340	100
11	38	418	121
50	**155**	**1367**	**428**

La última fila corresponde a la suma de los totales de las columnas.

La varianza que se utilizará es:

$$V_x = \sigma_x^2 = \frac{428}{7} - \left(\frac{50}{7}\right)^2 = 10{,}12$$

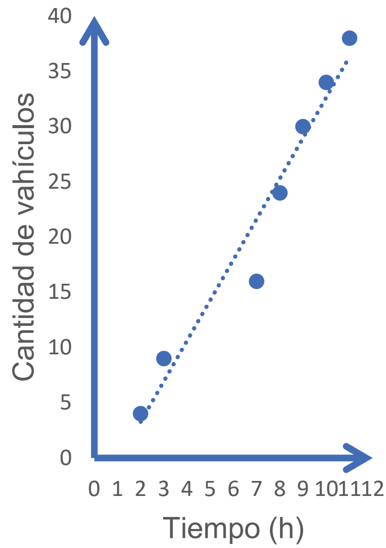
El valor de la covarianza es:

$$\sigma_{xy} = \frac{1367}{7} - \frac{50}{7} \cdot \frac{155}{7} = 37{,}12$$

Así, la ecuación de la recta de regresión y_i sobre x_i queda:

$$y - 22{,}14 = 3{,}67 \cdot (x - 7{,}14)$$

cuya gráfica es:



Haciendo $y = 70$, y reemplazando ese valor en la recta de regresión hallada:

$$70 - 22{,}14 = 3{,}67 \cdot (x - 7{,}14)$$

donde obtenemos $x = 20{,}18 \approx 20$.

Respuesta

Se estima que para obtener un flujo de 70 vehículos, habrán pasado aproximadamente 20 horas.

1378. En una encuesta se obtuvo los siguientes resultados, correspondientes al tiempo de lectura y ocio de un grupo de trabajadores:

$$(0,1);\ (1,2);\ (0,2);\ (3,1);\ (1,1);\ (1,2);\ (2,0);\ (3,0);\ (1,1);\ (2,2)$$

Mostrar y calcular:

a) La tabla de doble entrada.

b) La covarianza y las varianzas respectivas para encontrar el coeficiente de correlación.

c)La ecuación de la recta de regresión.

Resolución

b) Se tabulan los datos para el cálculo de las varianzas y la covarianza:

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
0	1	0	0	1
1	2	2	1	4
0	2	0	0	4
3	1	3	9	1
1	1	1	1	1
1	2	2	1	4
2	0	0	4	0
3	0	0	9	0
1	1	1	1	1
2	2	4	4	4
14	**12**	**13**	**30**	**20**

De la tabla, encontramos los valores de las varianzas que son:

$$\sigma_x^2 = 1{,}04\ ,\sigma_y^2 = 0{,}56$$

y la covarianza es $\sigma_{xy} = -0{,}38$.

Por tanto, el coeficiente de relación es:

$$r = \frac{-0{,}38}{\sqrt{1{,}04 \cdot 0{,}56}} \approx -0{,}50$$

c) Reemplazando datos en la ecuación de la recta de regresión, donde los promedios:

$$\bar{X} = 1{,}4 \text{ y } \bar{Y} = 1{,}2$$

obtenemos:

$$y - 1{,}2 = -0{,}37 \cdot (x - 1{,}4)$$

Respuestas

a) La tabla de doble entrada correspondiente es:

(y_i) \ (x_i)	0	1	2	3	Total
0			1	1	2
1	1	2		1	4
2	1	2	1		4
Total	2	4	2	2	**10**

b) Las varianzas de las variables x_i, y_i son 1,04 y 0,56 respectivamente y la covarianza es de -0,38. El coeficiente de correlación es de -0,7.

c) La ecuación de la recta de regresión de y sobre x es:

$$y = -0{,}37x + 1{,}72$$

Estadística para datos agrupados

1379. En la tabla se muestran los sueldos mensuales de 80 profesionales. ¿Cuántos profesionales ganan menos de 4500 bolivianos?

Intervalos de sueldo (en miles)	n_i	N_i	f_i
[2500; 3000)			
[3000; 3500)	48	60	
[3500; 4000)			0,1
[4000; 4500)			0,1
[4500; 5000)			

Resolución

Del problema $n = 80$, como $f_3 = \frac{n_3}{80}$ entonces $n_3 = 80 \cdot 0{,}1 = 8$ y

$N_3 = N_2 + n_3 = 8 + 60 = 68.$

Además, $n_4 = 0{,}1 \cdot 80 = 8$, luego $N_4 = 8 + 68 = 76.$

Respuesta

Son 76 profesionales los que ganan menos de 4500 bolivianos mensuales.

1380. Una institución psicológica hizo un test de coeficiente intelectual (CI) a 40 estudiantes, cuyos resultados se pueden ver en la tabla, ¿cuántos estudiantes sacaron puntuaciones menores a 100 puntos?

Intervalos	n_i	N_i	f_i
$[80; 85)$			
$[85; 90)$	14	16	
$[90; 95)$			0,1
$[95; 100)$			0,2
$[100; 120)$			

Resolución

Del problema tenemos $n = 40$ y $f_3 = \frac{n_3}{40}$, entonces $n_3 = 40 \cdot 0{,}1 = 4$ y

luego se obtiene $N_3 = N_2 + n_3 = 16 + 4 = 20.$

Con los datos de la tabla, tenemos que $n_4 = 0{,}2 \cdot 40 = 8$ y por tanto $N_4 = 8 + 20 = 28$

Así, $n_5 = 40 - N_4 = 12.$

Se procede a completar la tabla con la información recién obtenida:

Intervalos	n_i	N_i	f_i
$[80;85)$	2	2	0,1
$[85;90)$	14	16	0,4
$[90;95)$	4	20	0,1
$[95;100)$	8	28	0,2
$[100;120)$	12	40	1

Respuesta

Son 28 estudiantes los que obtuvieron puntuaciones menores a 100 puntos (el valor es $N_4 = 28$).

1381. A un grupo de 30 estudiantes se les pidió resolver un test de idiomas (ver tabla de distribución de frecuencias). Sabiendo que la amplitud de cada intervalo es 10 determine la cantidad de estudiantes que terminaron el test en menos de media hora.

Intervalos	X_i	n_i	N_i	f_i
[,)	5			0,1
[,)		6		
[,)				
[,)			18	0,2
[,)				
TOTAL		30		

Resolución

Si la amplitud es $A = 10$ entonces para $X_1 = 5$ la primera marca de clase de sus correspondientes extremos a_1 y b_1, tenemos:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 10 \\ b_1 - a_1 = 10 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, $b_1 = 10$ y $a_1 = 0$. Así obtenemos los intervalos de clase:

$$[0,10); [10,20); [20,30); [30,40); [40,50).$$

De los datos $n_1 = 30 \cdot 0{,}1 = 3 = N_1$, $N_2 = 9$ y $n_4 = 2$, por tanto:

$$N_3 = 18 - n_4 = 16$$

Datos

$A = 10$
$n_2 = 6$
$n = 30$
$N_4 = 18$
$f_1 = 0{,}1$
$f_4 = 0{,}2$

Respuesta

Son 16 estudiantes los que hicieron el test en menos de media hora.

Intervalo	n_i
[50, 59]	3
[60,69]	7
[70,79]	12
[80,89]	6
[90,99]	2

1382. Un maestro registró las calificaciones de un grupo de 30 estudiantes en la tabla. Calcular:

a) La media
b) La mediana
c) La moda

e interpretar los resultados.

Resolución

a) Completando la tabla del enunciado con las columnas de las marcas de clase, los productos de estas con las frecuencias absolutas y las frecuencias absolutas acumuladas, es posible calcular la media:

$[a$	$b]$	n_i	$X_i = \frac{a+b}{2}$	$X_i \cdot n_i$	N_i
50	59	3	54,5	163,5	3
60	69	7	64,5	451,5	10
70	79	12	74,5	894	22
80	89	6	84,5	507	28
90	99	2	94,5	189	30
TOTAL		30		2205	

Luego $\bar{X} = \frac{2205}{30} = 73{,}5$.

b) La posición de la mediana en la muestra agrupada viene dada por:

$$\frac{30}{2} = 15 > 12$$

Luego, la mediana está en la clase [70,79]. De la tabla en el inciso anterior, obtenemos los valores $N_{ant} = 10$, $n_{Me} = 10$ y $h = 10$.

Reemplazando los valores en la fórmula de la mediana:

$$Me = 70 + \left(\frac{\frac{30}{2} - 10}{12}\right) \cdot 10 = 74{,}8$$

c)Para calcular la moda, de la tabla del primer inciso, tomamos el más grande de los n_i, que en este caso es $n_3 = 12$ y los correspondientes anterior y posterior son $n_2 = 7$ y $n_4 = 6$ respectivamente.

El límite inferior es $L = 70$ y el ancho del intervalo es $h = 10$, luego con todo esto calculamos la moda:

$$Mo = 70 + \left(\frac{12 - 7}{2 \cdot 12 - 7 - 6}\right) \cdot 10 = 74{,}5$$

Respuesta

Los tres parámetros están muy cercanos, de modo que sugieren una distribución acampanada.

Intervalo	n_i
$[0,1)$	5
$[1,2)$	9
$[2,3)$	12
$[3,4)$	7
$[4,5)$	2

1383. En una encuesta sobre el tiempo de uso del móvil por día (en horas), los datos obtenidos se presentan en la tabla.

Encontrar e interpretar los valores de la media, mediana y moda de la muestra agrupada.

Resolución

Tabulamos los datos del problema, junto con los valores de las marcas de clase y los productos para calcular el promedio, la mediana y la moda:

$[a$	$b)$	n_i	$X_i = \frac{a+b}{2}$	$X_i \cdot n_i$	N_i
0	1	5	0,5	2,5	5
1	2	9	1,5	13,5	14
2	3	12	2,5	30	26
3	4	7	3,5	24,5	33
4	5	2	4,5	9	35
TOTAL		35		79, 5	

Luego $\bar{X} = \frac{79{,}5}{35} = 2{,}27$.

Ya que $\frac{35}{2} = 17{,}5 > 12$, la mediana está en la clase $[2{,}3)$.

De la tabla: $N_{ac} = N_2 = 14, n_{Me} = n_3 = 12$ y $h = 1$.

Reemplazando estos valores:

$$Me = 2 + \left(\frac{\frac{35}{2} - 14}{12}\right) \cdot 1 = 2{,}3$$

La frecuencia modal $n_{Mo} = n_3 = 12$, $n_2 = 9$ y $n_4 = 7$; además el límite inferior es $L = 2$ y el ancho del intervalo es $h = 1$, luego con todo esto calculamos la moda:

$$Mo = 2 + \left(\frac{12 - 9}{2 \cdot 12 - 9 - 7}\right) \cdot 1 = 2{,}36$$

Respuesta

Los valores pedidos son $Me = 2{,}3$, $Mo = 2{,}4$ y $\bar{X} = 2{,}3$ (la cantidad de horas más frecuente es de 2,4 y es casi en ese mismo tiempo el promedio de tiempo de uso, además la mitad de los usuarios llega a usar el móvil hasta 2,3 horas al día).

Intervalo de alturas (cm)	n_i
$[139, 149)$	5
$[149, 159)$	9
$[159, 169)$	14
$[169, 179)$	10
$[179, 189)$	2

1384. Pasada la medición, una maestra de educación física, registró las alturas de 40 estudiantes (ver tabla). Se pide:

a) Determinar la altura media de los estudiantes.

b) Calcular la desviación media e interpretar su resultado.

Resolución

Tabulamos los datos del problema:

$[a$	$b)$	n_i	$X_i = \frac{a+b}{2}$	$X_i \cdot n_i$	$\lvert X_i - \bar{X} \rvert \cdot n_i$
139	149	5	144	720	93,5
149	159	9	154	1386	78,3
159	169	14	164	2296	18,2
169	179	10	174	1740	113
179	189	2	184	368	42,6
TOTAL		$n = 40$		6510	345,6

Luego $\bar{X} = 162{,}7$ y valor de la desviación media es $D_{\bar{X}} = \frac{345{,}6}{40} = 8{,}6$.

Respuestas

a) La altura media de los estudiantes es de 162,7 cm.
b) Los datos de las alturas de los estudiantes están en su mayoría entre 162,7 - 8,6 = 154,1 centímetros y 162,7 + 8,6 = 171,3 centímetro.

1385. Encontrar la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación para los datos agrupados de la producción de maíz por hectárea en diferentes zonas. Interpretar los resultados encontrados.

Producción (t)	n_i
[100,200)	12
[200, 300)	8
[300,400)	9
[400,500)	11

Resolución

Se procede a mostrar la tabla con las frecuencias absolutas, marcas de clase para facilitar el cálculo del promedio y la varianza de la muestra, donde n = 40:

Intervalo de clase	Marca de clase (X_i)	$n_i \cdot X_i$	n_i	$n_i \cdot (X_i - \bar{X})^2$
[100,200)	150	1 800	12	261 075
[200,300)	250	2 000	8	18 050
[300,400)	350	3 150	9	24 806,3
[400,500)	450	4 950	11	255 818,7
TOTAL		11 900	40	559 750

De la tabla, $\bar{X} = 297{,}5$ y luego $V = \frac{557\ 750}{40} = 13\ 993{,}75$ Con esto $\sigma = \sqrt{V} = 118{,}30$.

Así $CV = \dfrac{118{,}30}{297{,}5} = 0{,}4$

Respuesta

El coeficiente de variación es del 40%; es decir, los datos de la producción están bastante dispersos.

Velocidad (km/ h)	n_i
[60,69)	8
[69,78)	12
[78,86)	18
[86,94)	10
[94,100)	2

1386. Las velocidades de los vehículos en una autopista están agrupadas en la tabla. Encuentre el coeficiente de correlación e interprete su resultado.

Resolución

Se elabora una tabla, con tal de facilitar los cálculos de los parámetros para la media y la varianza:

$[a$	$b)$	X_i	n_i	$n_i \cdot X_i$	$n_i \cdot (X_i - \overline{X})^2$
60	69	64,5	8	516	1776,1
69	78	73,5	12	882	417,72
78	86	82	18	1476	121,7
86	94	90	10	900	1123,6
94	100	97	2	194	619,52
		TOTAL	$n = 50$	3968	4058,6

Luego $V = \frac{4058{,}6}{50} = 81{,}17$, y $\sigma = 9{,}01$.

Por tanto el coeficiente de variación es $CV = \frac{9{,}01}{79{,}4} \approx 0{,}11 = 11\%$.

Respuesta

Los valores de las velocidades presentan baja dispersión, como es de esperar, pues la vía es una autopista.

Incremento en centavos	n_i
[0,5; 0,8)	5
[0,8; 1,1)	8
[1,1; 1,5)	12
[1,5; 1,8)	7
[1,8; 2)	3

1387. Los incrementos del precio de un producto en distintas tiendas están agrupados en intervalos (ver tabla).
Encuentre la desviación estándar para conocer el intervalo de dispersión del costo del producto. Si el precio es de Bs 75, ¿cuál es el precio menor, medio y mayor del producto?

Resolución

Los datos tabulados son:

$[a$	$b)$	X_i	n_i	$n_i \cdot X_i$	$n_i \cdot (X_i - \overline{X})^2$
0,5	0,8	0,65	5	3,25	1,86
0,8	1,1	0,95	8	7,6	0,77
1,1	1,5	1,3	12	15,6	0,02
1,5	1,8	1,65	7	11,55	1,06
1,8	2	1,9	3	5,7	1,23
		TOTAL	$n = 35$	44	4,94

Luego $\overline{X} = \frac{44}{35} \approx 1{,}26$ y con valores totales en la tabla se encuentran la varianza y la desviación típica.

$$V = \frac{4{,}94}{35} = 0{,}14 \text{ y } \sigma = \sqrt{0{,}14} \approx 0{,}37$$

Respuesta

Utilizando el valor de la desviación típica, el costo incrementado promedio del producto es de 76,63 bolivianos, donde el precio incrementado más bajo es de 75,89 bolivianos.

1388. Para la siguiente tabla de datos agrupados encontrar el percentil $°P_{70}$.

Intervalos de clase	n_i
$[10, 20)$	5
$[20, 30)$	8
$[30, 40)$	12
$[40, 50)$	20
$[50, 60)$	10

Resolución

El percentil $°P_{70}$ representa el 70 por ciento de la cantidad de datos, entonces la posición del percentil setenta es:

$$70\% \cdot 55 = 0{,}70 \cdot 55 = 38{,}5$$

La frecuencia acumulada $N_4 = 45$ es la primera de ellas mayor a 38,5.

Luego el percentil 70 se ubica en el intervalo [40,50).

Identificando los datos como $L = 40$, $N_{ant} = N_3 = 25$ y $n_4 = 20$ y $h = 50 - 40 = 10$, reemplazamos en la fórmula del cálculo del 70avo percentil:

$$°P_{70} = 40 + \left(\frac{70 \cdot \frac{55}{100} - 25}{20}\right) \cdot 10 = 46{,}75$$

Respuesta

El 70avo percentil es aproximadamente 46,8.

Intervalos de tiempo (min)	n_i
$[0, 10]$	3
$[20, 30]$	7
$[40, 50]$	10
$[60, 70]$	15
$[80, 90]$	5

1389. Se pide encontrar el primer cuartil de los datos agrupados de la tabla, que corresponden a un equipo de fútbol y los goles que anota de local en los intervalos de tiempo. Interprete el resultado.

Resolución

El primer cuartil $°Q_1$ representa el 25% de la cantidad de datos, luego su posición en la muestra es:

$$25\% \cdot 30 = 0{,}25 \cdot 30 = 7{,}5$$

La frecuencia acumulada $N_2 = 10$ es la primera de ellas mayor a 7,5.

El primer cuartil se ubica en el intervalo [20, 30). Siendo $L = 20$, $N_{ant} = 3 = n_1$ y $h = 10 - 0 = 10$ la amplitud del intervalo de clase del cuartil buscado, reemplazamos en la fórmula:

$$°Q_1 = 20 + \left(\frac{\frac{40}{4} - 3}{7}\right) \cdot 10 = 30$$

Respuesta

El primer cuartil es igual a 30 o sea el equipo cuando juega de local anota un gol antes de los 30 minutos de juego.

1390. Los datos de la tabla son las temperaturas en grados centígrados, registradas en el día durante el ingreso de personas al hospital. Encuentre el percentil 25 para saber qué podría estar ocurriendo con las personas.

Intervalos de temperatura ($°C$)	n_i
$[-5, -3{,}2)$	3
$[-3{,}2, 0)$	2
$[0, 5]$	4
$[5, 15)$	15
$[15, 35)$	25

Resolución

Se ubica al percentil buscado:

$$0{,}25 \cdot 49 = 12{,}25$$

en el intervalo [5,15). Siendo $L = 5$, $N_{ant} = 10$, $n_4 = 15$ y $h = 15 - 5 = 10$, reemplazamos en la fórmula:

$$°P_{25} = 5 + \left(\frac{0{,}25 \cdot 49 - 10}{15}\right) \cdot 10 = 6{,}5$$

Respuesta

El percentil encontrado indica que aproximadamente 12 de las 49 personas que ingresan al hospital, tiene temperaturas por debajo de los 6,5°C (probablemente muy enfermas).

1391. Las edades recopiladas de un grupo de 40 personas están agrupadas como en la tabla. Encontrar el cuarto decil ($°D_4$) para la variable edad.

Edad (años)	n_i
$[5,15)$	6
$[15,25)$	9
$[25,35)$	14
$[35,45)$	8
$[45,55)$	3

Resolución

El decil buscado está en la posición $0{,}4 \cdot 40 = 16$. Completando la tabla con las frecuencias absolutas acumuladas:

Edad (años)	n_i	N_i
$[5,15)$	6	6
$[15,25)$	9	15
$[25,35)$	14	19
$[35,45)$	8	27
$[45,55)$	3	30

obtenemos el intervalo de clase que contiene al cuarto decil: [25,35), pues $N_3 = 19 > 16$.

Con L=25, $N_{ant} = N_2 = 15$, $n_3 = 14$ y $h = 15 - 5 = 10$, reemplazamos en la fórmula:

$$°D_4 = 25 + \left(\frac{\frac{4 \cdot 40}{10} - 15}{14}\right) \cdot 10 = 25{,}8$$

Respuesta

El cuarto decil indica que, de las 40 personas, el 40% es menor de 26 años.

Gastos varios (Bs)	n_i
[5, 20)	31
[20, 35)	15
[35, 50)	10
[50, 65)	12
[65, 80)	20

1392. La tabla muestra los montos agrupados destinados a gastos varios en el presupuesto mensual de una persona, ¿cuánto es el gasto acumulado hasta el séptimo decil?

Resolución

Se busca el séptimo decil ($°D_7$), completando la tabla con las frecuencias absolutas acumuladas y las marcas de clase:

Gastos varios (Bs)	n_i	N_i	X_i	$n_i \cdot X_i$
[5, 20)	31	31	12,5	387,5
[20, 35)	15	46	27,5	412,5
[35, 50)	10	56	42,5	425
[50, 65)	12	68	57,5	690
[65, 80)	20	88	72,5	1450

La posición del séptimo decil es 61,6 y el intervalo de clase que contiene al séptimo decil es [50,65), pues $N_4 = 68 > 61{,}6$.

Con $L = 50$, $N_{ant} = N_3 = 56$, $n_4 = 12$ y $h = 65 - 50 = 15$, reemplazamos en la fórmula:

$$°D_7 = 50 + \left(\frac{\frac{7 \cdot 88}{10} - 56}{12}\right) \cdot 15 = 57$$

Finalmente calculamos el promedio entre 57 y $L = 50$ que es 53,5. Luego multiplicamos por la frecuencia respectiva y la suma resultante es:

$$642 + 425 + 412{,}5 + 387{,}5 = 1867$$

Respuesta

El gasto mensual acumulado hasta el séptimo decil es 1867 bolivianos.

Matemática financiera

1393. (**Planificación de ahorros para la educación**) Una familia desea ahorrar para la educación universitaria de su hija que comenzará en 10 años. La cantidad estimada es de Bs 100 000. Si planean ahorrar una cantidad fija cada mes en una cuenta que ofrece un interés anual compuesto del 5% mensualmente, ¿cuánto debe ahorrar cada mes?

Datos

$C_f = 100\ 000$
$r = 5\% = 0{,}05$
$t = 10$
n: N° de periodos compuestos al año.
$n = 12$
Incógnita:
C: cuota mensual

Resolución

En la fórmula del valor futuro para pagos periódicos:

$$C_f = C \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} - 1}{\frac{r}{n}}$$

despejando: $$C = C_f \cdot \frac{\frac{r}{n}}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} - 1}$$

y reemplazando datos obtenemos:

$$C = 100\ 000 \cdot \frac{\frac{0{,}05}{12}}{\left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{12\cdot 10}} = 643{,}8$$

Respuesta
El ahorro mensual debe ser de 643,8 bolivianos.

1394. (**Comparación de hipotecas**) Una pareja contempla dos opciones planteadas por una entidad financiera en la hipoteca de su casa, valuada en Bs 300 000. La primera opción es una hipoteca a 30 años con una tasa de interés fija del 3,5% anual y la segunda opción es una hipoteca a 15 años con una tasa de interés fija del 2,8%, ¿cuál es la diferencia en el pago mensual entre las dos hipotecas?

Datos

P: Monto hipoteca
$P = 300\ 000$
$r_1 = 3{,}5\%$
$r_2 = 2{,}8\%$
$t_1 = 30$
$t_2 = 15$
$n_1 = 360$
$n_2 = 180$
Incógnita: C_1, C_2

Resolución

Utilizando la fórmula del pago mensual

$$C = \frac{P \cdot \frac{r}{12}}{1 - \left(1+\frac{r}{12}\right)^{-n}}$$

– **Primera opción (r_1):**

En este caso, tenemos:

$$C_1 = \frac{300\,000 \cdot \frac{0{,}035}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0{,}035}{12}\right)^{-360}} = 1347{,}13$$

– **Segunda opción (r_2):**

En este caso, tenemos:

$$C_2 = \frac{300\,000 \cdot \frac{0{,}028}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0{,}028}{12}\right)^{-180}} = 2043{,}01$$

Luego 2043,01 - 1347,13 = 695,88

Respuesta
El monto resultante de la diferencia de ambas cuotas mensuales es de 695,88 bolivianos.

1395. (**Inflación y ahorros**) Juan tiene ahorros de Bs 50 000 y la tasa de inflación anual es del 3%. Si no añade más a lo ahorrado, ¿cuál será el valor real de sus ahorros en 10 años?

Datos

C_0: Ahorro actual
$C_0 = 50\,000$
i: tasa de inflación anual.
$i = 3\%$
t = 10

Incógnita:

C_f: capital final

Resolución

El valor futuro ajustado por inflación viene dado por la siguiente expresión:

$$C_f = C_0 \cdot \frac{1}{(1+r)^t}$$

Reemplazando datos en la fórmula:

$$C_f = 50\,000 \cdot \frac{1}{(1+0{,}03)^{10}} = 37\,204{,}7$$

Respuesta
El valor real de los ahorros en 10 años será aproximadamente 37 204,7 bolivianos.

1396. (**Rendimiento de inversiones**) Pedro y María deciden invertir 10 000 bolivianos en un fondo mutuo que promete un rendimiento anual del 7%, ¿cuánto dinero tendrán en 15 años si no hacen retiros ni aportes adicionales?

Datos

$C_0 = 10\,000$
$r = 7\% = 0{,}07$
$t = 15$
Incógnita:
C_f

Resolución

Con un plazo de 15 años, conviene utilizar el interés compuesto, pues se obtienen mayores beneficios (con un interés simple, dentro de 15 años solo se obtienen Bs 20 500).

Así, con los datos reemplazamos en la fórmula del interés compuesto:

$$C_f = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}07)^{15} = 27\,591{,}1$$

Respuesta

La pareja en 15 años obtendrá aproximadamente Bs 27 591,1.

1397. (**Evaluación de seguros médicos**) Un padre de familia tiene dos opciones de seguro médico. La primera es una prima mensual (monto a pagar para mantener el plan de salud) de Bs 500 con un deducible anual (monto de pago propio previo a la acción del seguro) de Bs 2000 y la otra alternativa es una prima mensual de Bs 600 con un deducible anual de Bs 1000. Si el padre de familia estima que gastará Bs 3000, en atención médica anualmente, ¿cuál es la opción más económica?

Datos

p_1, p_2: Prima mensual
D: deducible anual
G: gastos médicos estimados
$D = 2000$
$p_1 = 500$
$p_2 = 600$

Incógnitas:
P_1 ,P_2: Prima anual

Resolución

Primera opción:

Calculamos la prima anual:

$$P_1 = p_1 \cdot 12 = 500 \cdot 12 = 6000$$

y por tanto, esta alternativa tiene un costo de 6000 + 2000 = 8000 bolivianos.

Segunda opción:

Calculamos la prima anual:

$$P_2 = p_2 \cdot 12 = 7200$$

y por tanto, esta alternativa tiene un costo de 7200 + 1000 = 8200 bolivianos.

Respuesta

La primera opción, con un costo de 8000 bolivianos.

1398. (**Costo de mantenimiento del vehículo**) Jaime necesita un vehículo, de modo que aparte de la inversión de Bs 25 000 para adquirirlo, investiga los costos de mantenimiento del mismo. El 5% del valor del vehículo es el costo del mantenimiento anual y el valor del mismo disminuirá también en un 10% anual, ¿cuánto costará el mantenimiento total en 5 años?

Datos

V: Valor del vehículo
A: Costo mantenimiento anual
D: Depreciación anual
$V = 25\,000$
$A = 5\%$
$D = 10\%$

Resolución

El valor del vehículo pasado cada año será:

Año 1	$V = 25\,000$	$V \cdot D = 22\,500$
Año 2	$V = 22\,500$	$V \cdot D = 20\,250$
Año 3	$V = 20\,250$	$V \cdot D = 18\,225$
Año 4	$V = 18\,225$	$V \cdot D = 16\,402{,}5$
Año 5	$V = 16\,402{,}5$	$V \cdot D = 14\,762{,}25$

El costo del mantenimiento anual será:

Año 1	$22\,500$	$22\,500 \cdot \mathrm{A} = 1125$
Año 2	$20\,250$	$20\,250 \cdot \mathrm{A} = 1012{,}5$
Año 3	$18\,225$	$18\,225 \cdot \mathrm{A} = 911{,}25$
Año 4	$16\,402{,}5$	$16\,402{,}5 \cdot \mathrm{A} = 820{,}13$
Año 5	$14\,762{,}25$	$14\,762{,}3 \cdot \mathrm{A} = 738{,}11$

La suma de la tercera columna de la última tabla es:

$$1125 + 1012{,}5 + 911{,}25 + 820{,}13 + 738{,}11 = 4606{,}99$$

Respuesta

El costo total del mantenimiento en 5 años será de Bs 4606,99.

1399. (**Cálculo de impuestos**) El ingreso bruto anual de una trabajadora es de Bs 12 000. Las deducciones estándar y exenciones personales (reducción en los ingresos) suman Bs 1200. La tasa impositiva es del 10% para los primeros Bs 6000 de ingreso imponible y del 20% para el resto, ¿cuánto debe pagar la trabajadora en impuestos?

Datos

I: Ingreso anual bruto

D: Deducciones

$I = 12\ 000$

$D = 1200$

Resolución

El ingreso imponible será el resultado de extraerle las deducciones al ingreso bruto anual:

$$12\ 000 - 1200 = 10\ 800$$

El impuesto para los primeros Bs 6000, con la tasa impositiva del 10% es:

$$6000 \cdot 0{,}10 = 600$$

El impuesto para los Bs 4800 restantes, con la tasa impositiva del 20%:

$$4800 \cdot 0{,}20 = 960$$

Por tanto, el impuesto total es:

$$600 + 960 = 1560$$

Respuesta

La trabajadora debe pagar Bs 1560 en impuestos.

1400. (**Presupuesto familiar**) El presupuesto mensual de una pareja es de Bs 7500. El 30% se destina en vivienda, 20% en alimentación, 15% en transporte, 10% en servicios públicos y el resto se destina a ahorros y entretenimiento, ¿cuánto dinero tienen disponible para ahorros y entretenimiento?

Avanzado 03

Datos

P:presupuesto mensual

$P = 7500$

Resolución

Vivienda	$7500 \cdot 30\% = 2250$
Alimentación	$7500 \cdot 20\% = 1500$
Transporte	$7500 \cdot 15\% = 1125$
Servicios públicos	$7500 \cdot 10\% = 750$

Los valores de la segunda columna de la tabla, corresponden a los gastos, que hacen un total de Bs 5625.

El monto disponible para ahorros y dinero es:

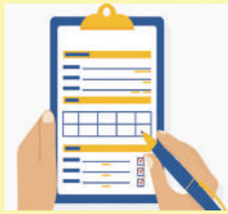
$$7500 - 5625 = 1875$$

Respuesta

La pareja tendrá disponible para ahorro y entretenimiento 1875 bolivianos.

1401. En una unidad educativa, se realizó una encuesta para conocer las características de los estudiantes. Los datos recolectados incluyen las siguientes variables:

- Nombre del estudiante
- Edad
- Lo que le gusta
- Lo que no le gusta
- Tiempo dedicado al estudio.
- Tiempo dedicado al ocio.



Relacionar con una flecha cada variable con su respectiva clase: cualitativa nominal, cualitativa ordinal, cuantitativa discreta o cuantitativa continua.

Respuesta

Variable cuantitativa discreta
Variable cuantitativa continua
Variable cualitativa ordinal
Variable cualitativa nominal

Nombre del estudiante
Edad
Lo que le gusta
Lo que no le gusta
Tiempo dedicado al estudio
Tiempo dedicado al ocio

1402. En una localidad del país, se investigó el tiempo de uso de redes sociales entre la población mayor de 10 años y menor de 20. Los datos recolectados incluyen:

- Cantidad de redes sociales utilizadas.
- Páginas favoritas.
- Tiempo promedio invertido en su uso.
- Nivel de satisfacción en decimales, de 0 (nada satisfecho) a 1 (totalmente satisfecho).
- Red social preferida.

Determinar el tipo de cada variable (nominal, ordinal, discreta o continua).

Respuesta

Variable cuantitativa discreta
Variable cuantitativa continua
Variable cualitativa ordinal
Variable cualitativa nominal

Cantidad de redes sociales utilizadas
Páginas web favoritas
Tiempo promedio de uso
Nivel de satisfacción de 0 a 1
(0: malo; 1: bueno)
Red social preferida

1403. A través de una encuesta, se obtuvo resultados sobre la población que paseaba por la plaza de una ciudad en Tarija. Se recolectó la siguiente información:

- Preferencia por la lectura (nula, poca, normal, alta, muy alta)
- Número de libros leídos por mes
- Género literario preferido (Ficción, Fantasía, Ensayo, Reportaje, Otros)
- Tiempo dedicado a la lectura por semana.

Determinar el tipo de cada variable (nominal, ordinal, discreta o continua).

Respuesta

Variables	
Cualitativas	**Cuantitativas**
- Preferencia por la lectura (nula, poca, normal, alta, muy alta) es del tipo **ordinal** .	- Número de libros leídos por mes es del tipo **discreto**.
- Género literario preferido es del tipo **nominal** .	- Tiempo dedicado a la lectura por semana también es del tipo **discreto**.

1404. Una unidad educativa recopiló información acerca del consumo de comida rápida de su unidad. Los datos recolectados incluyen las siguientes variables:

- Edad
- Peso
- Tipo de sangre
- Platillo o bocadillo preferido
- Fecha de nacimiento
- Cantidad de calorías
- Gasto diario en comida rápida
- Nivel de estrés (nulo, bajo, medio alto)

Determinar el tipo de cada variable (nominal, ordinal, discreta o continua).

Respuesta

Variables	
Cualitativas	**Cuantitativas**
- Platillo o bocadillos es del tipo **nominal** . - Fecha de nacimiento es del tipo **nominal** . - Tipo de sangre es del tipo **nominal** .	- Edad es de tipo **discreto**. - Peso es de tipo **continuo** . - Cantidad de calorías es del tipo **continuo** . - Gasto diario en comida rápida es del tipo **discreto**.

1405. Dadas las siguientes poblaciones, determinar una muestra adecuada para cada una.

a) Población: Todos los pacientes en el mundo que sufren de diabetes tipo 2.

Fuente: Yandex

b) Población: Todos los estudiantes de secundaria del país.

Fuente: andina.pe

Respuestas

a) Muestra: 500 pacientes de diabetes tipo 2, seleccionados aleatoriamente de 9 hospitales de cada una de las capitales del país

Fuente: elheraldo.co

b) Muestra: 1200 estudiantes de secundaria, seleccionados de 50 unidades educativas en 50 diferentes unidades educativas.

Fuente: EjuTV

1406. Dadas las siguientes poblaciones, determinar una posible muestra para cada una.

a) Población: Todos los adultos residentes en una ciudad capital.

Fuente: Yandex

b) Población: Todos los consumidores que compran productos de una cadena de supermercados específica.

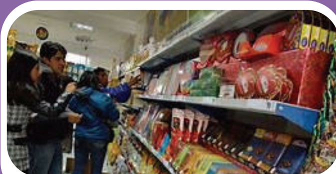
Fuente: Yandex

Respuestas

a) Muestra: 2000 adultos elegidos, agrupados bajo algún criterio (por ejemplo la edad).

Fuente: Yandex

b) Muestra: 3000 consumidores seleccionados a partir de los datos de sus respectivos pagos, para analizar las preferencias de algún tipo de producto orgánico.



Fuente: Bolivia Informa

1407. Proponer una muestra adecuada para cada una de las siguientes poblaciones:

a) Población: Todas las especies de aves en un bosque tropical.

Fuente: Yandex

b) Población: Todos los puentes en una región propensa a terremotos.

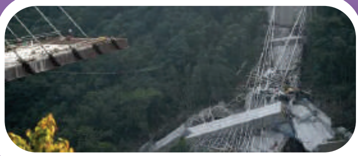
Fuente: cuevadelcivil.com

Respuestas

a) Muestra: 150 aves capturadas en estaciones de monitoreo, distribuidas aleatoriamente en el bosque para evaluar la biodiversidad y el impacto de la deforestación.

Fuente: elsouvenir.com

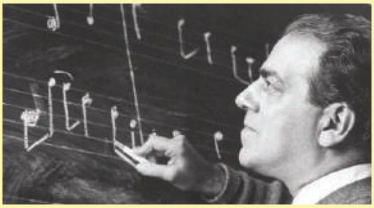
b) Muestra: 50 puentes seleccionados basados en diferentes características estructurales para evaluar su resistencia a terremotos.



Fuente: cnn.com

1408. Proponer de las siguientes poblaciones, una muestra adecuada para cada una.

a) Población: Todas las grabaciones de música clásica de un compositor específico.



Fuente: Yandex

b) Población: Todas las plantas nativas de una reserva natural.

Fuente: Yandex

Respuestas

a) Muestra: 100 grabaciones seleccionadas para analizar las variaciones en la interpretación de diferentes directores de orquesta.

Fuente: psn.si

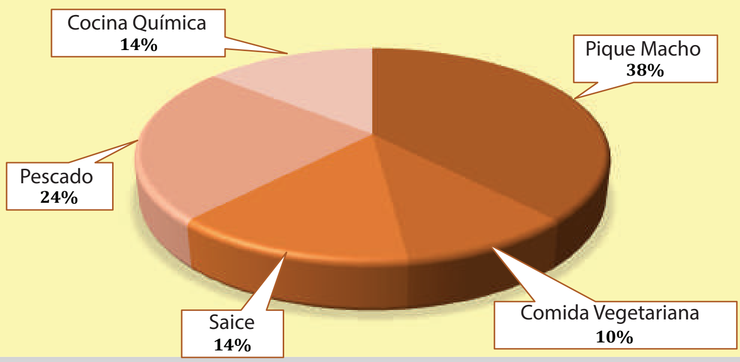
b) Muestra: 500 plantas nativas seleccionadas para investigar los efectos del cambio climático en su crecimiento y distribución.

Fuente: welovemontains.net

1409. El siguiente diagrama de sectores representa la preferencia gastronómica que presentó un reporte televisivo del país de 2000 visitantes a una feria gastronómica.

Realizar una tabla de distribución de frecuencias que refleje la información del diagrama, sabiendo que los porcentajes corresponden a las frecuencias relativas.

PREFERENCIA GASTRONÓMICA



Datos

$n = 2000$

$\%_{f_i}$: Porcentaje de la frecuencia relativa f_i.

$\%_{f_1} = 38\%$

$\%_{f_2} = 10\%$

$\%_{f_3} = 14\%$

$\%_{f_4} = 24\%$

$\%_{f_5} = 14\%$

Resolución

Se calculan las frecuencias absolutas:

$$\%_{f_1} = f_1 \cdot 100\%$$

Despejando f_1, tenemos:

$$f_1 = \frac{38}{100} = 0{,}38$$

Con $f_1 = 0{,}38$, se puede encontrar la frecuencia absoluta n_1:

$$n_1 = 0{,}38 \cdot 2000 = 760$$

De manera similar, se encuentran los demás valores de las frecuencias absolutas restantes que completarán la tabla.

Respuesta

Plato	n_i	N_i	f_i	$\%_{f_i}$
Pique Macho	760	760	0,38	38
Comida Vegetariana	200	960	0,1	10
Pescado	280	1240	0,14	14
Saice	480	1720	0,24	24
Cocina Química	280	2000	0,14	14
TOTAL	**2000**		**1**	**100**

1410. Fabiola debe realizar una tarea de la clase, la cual consiste en elaborar una tabla de distribución de frecuencias de la muestra.
Los datos son los siguientes:

$$1, 2, 1, 0, 4, 2, 1, 1, 0, 1, 2, 4$$

Resolución

Se ordenan los datos crecientemente:

$$0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4$$

Respuesta

La tabla de distribución de frecuencias correspondiente a la muestra es:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	2	0,17	2	0,17
1	5	0,42	7	0,58
2	3	0,25	10	0,83
4	2	0,17	12	**1**
TOTAL	12	1		

1411. Sean los datos x_i con sus respectivas frecuencias absolutas n_i como en la tabla, ¿cuál es el tamaño de la muestra?

Datos x_i	n_i
x_1	1
x_2	2
x_3	3
$\vdots$	$\vdots$
x_{m-1}	$m-1$
x_m	m
TOTAL	n

Resolución

La cantidad de población se obtiene sumando los valores de la columna n_i; es decir:

$$n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (m-1) + m = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$$

por la suma de Gauss.

Respuestas

La muestra tiene un tamaño de $n = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$ datos.

1412. La siguiente tabla representa la cantidad de productos de limpieza vendidos en un supermercado:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
146	150	180	150	150	160	170

Determinar si es cierto que el porcentaje de ventas correspondiente al día lunes es el menor.

Resolución

Se encuentra el total de las ventas de la semana que es $n = 1106$.

El valor 146, que corresponde al día lunes representa el siguiente porcentaje:

$$\frac{146}{1106} \cdot 100\% = 13{,}20\%$$

Calculamos los demás porcentajes en la siguiente tabla:

Día	Cantidad	Porcentaje
Lunes	146	13,20
Martes	150	13,56
Miércoles	180	16,27
Jueves	150	13,56
Viernes	150	13,56
Sábado	160	14,47
Domingo	170	15,37
	TOTAL	100%

Respuesta

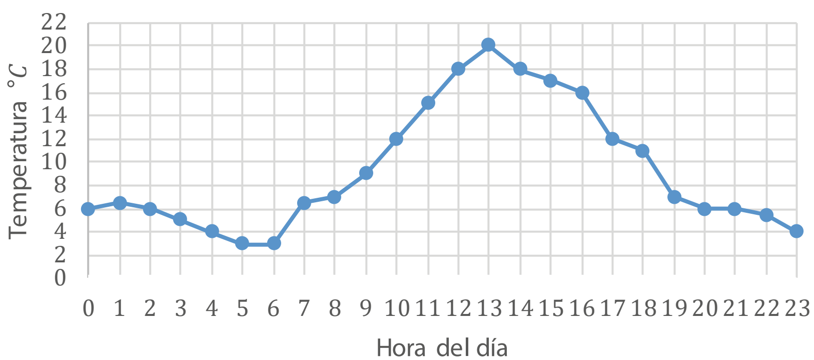
Si es cierto que el lunes tiene el menor porcentaje, con 13,20%.

1413. El polígono de frecuencias muestra el monitoreo de temperatura en °C en una ciudad, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) La temperatura más alta se registrará al mediodía

b) Durante las primeras 6 horas del día, la temperatura irá aumentando.

c) A partir de las 19 horas, la temperatura se mantiene constante.



Respuestas

a) Del gráfico, se concluye que la temperatura más alta se registrará a horas 13, es decir, una hora después del mediodía, por tanto la afirmación es falsa.

b) Del gráfico, si contamos el inicio del amanecer desde las 6 am, concluimos que la temperatura aumenta hasta el mediodía de modo que la afirmación es verdadera.

c) Del gráfico, se observa un decremento en la temperatura, por tanto la afirmación es falsa.

1414. Un estudio realizado a los estudiantes de cierta unidad educativa acerca del medio de transporte más utilizado para llegar al colegio, recopiló la siguiente información:

- Transporte público: 10 estudiantes
- Bicicleta: 20 estudiantes
- Caminando: 350 estudiantes
- Vehículo particular: 5 estudiantes
- Balsa: 35 estudiantes

Mostrar una tabla de distribución de frecuencias para investigar el porcentaje de estudiantes que llegan caminando a la unidad.

Resolución

Con la información del problema, se procede a elaborar la tabla de distribución de frecuencias de la muestra:

Medio de transporte	n_i	N_i	f_i	F_i
Transporte público	10	10	0,02	0,02
Bicicleta	20	30	0,05	0,07
Caminando	350	380	0,83	0,91
Vehículo particular	5	385	0,01	0,92
Balsa	35	420	0,08	1
TOTAL	420		1	

Luego $0{,}83 \cdot 100\% = 83\%$.

Respuesta

El porcentaje que corresponde a los estudiantes que llegan caminando a la unidad es del 83%.

1415. Encontrar el porcentaje de las edades de los estudiantes miembros del club de lectura, donde las edades de los 20 miembros son:
12, 14, 17, 12, 14, 12, 15, 12, 12, 12, 14, 14, 15, 15, 17, 17, 12, 15, 14, 12

¿Cuál es el porcentaje del total de los estudiantes que tiene hasta 15 años? ¿cuál es la moda?

Resolución

Para responder a las preguntas, se elabora una tabla de distribución de frecuencias, para encontrar las frecuencias relativas acumuladas:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$\%_{N_i}$
12	8	8	0,4	0,4	40
14	5	13	0,25	0,65	65
15	4	17	0,2	0,85	85
17	3	20	0,15	1	100
TOTAL	20		1		

Se busca el porcentaje correspondiente a N_3, el cual es $\%_{N_3} = 85\%$.

Respuesta
El 85% de los estudiantes tiene a lo más 15 años y la moda es Mo = 12.

1416. Para la siguiente tabla de frecuencias acumuladas incompleta, se pide encontrar el valor de x, el promedio, la moda y completar los valores con los datos en la tabla.

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
1	10			
2	8			x
3				1
TOTAL	20		1	

Incógnitas

$x = F_2$

$\bar{X}$

Mo

Resolución

Calculamos x, sabiendo que:

$$x = F_2 = f_2 + f_1 = \frac{n_2}{20} + \frac{n_1}{20} = \frac{8}{20} + \frac{10}{20} = 0{,}9$$

Con el valor de x recién encontrado y las frecuencias absolutas, podemos completar la tabla de distribución de frecuencias:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
1	10	10	0,5	0,5
2	8	18	0,4	$x = 0{,}9$
3	2	20	0,1	1
TOTAL	20		1	

Respuesta

El valor de x es 0,9, el promedio es 1,6 y la moda es $Mo = x_i = 1$.

1417. El registro de aquellos 40 empleados con más años en servicio de una empresa viene dado en la tabla, pero está incompleto, ¿cuál es el porcentaje de empleados con 15 años de servicio?, ¿cuál es la desviación media del número de años de servicio?

Años de servicio	Cantidad de empleados	Porcentaje de empleados (%)
12		20
13	10	
14		45
15		

Resolución

La cantidad de empleados con 15 años de servicio se calcula:

$$\%_{f_1} = 20\% = f_1 \cdot 100\% \Rightarrow f_1 = 0{,}2$$

Luego:

$$f_1 = \frac{n_1}{40} \Rightarrow n_1 = 40 \cdot 0{,}2 = 8$$

De manera similar $n_3 = 18$ y $n_4 = 4$. De modo que:

$$\%_{f_4} = \frac{4}{40} \cdot 100\% = 10\%$$

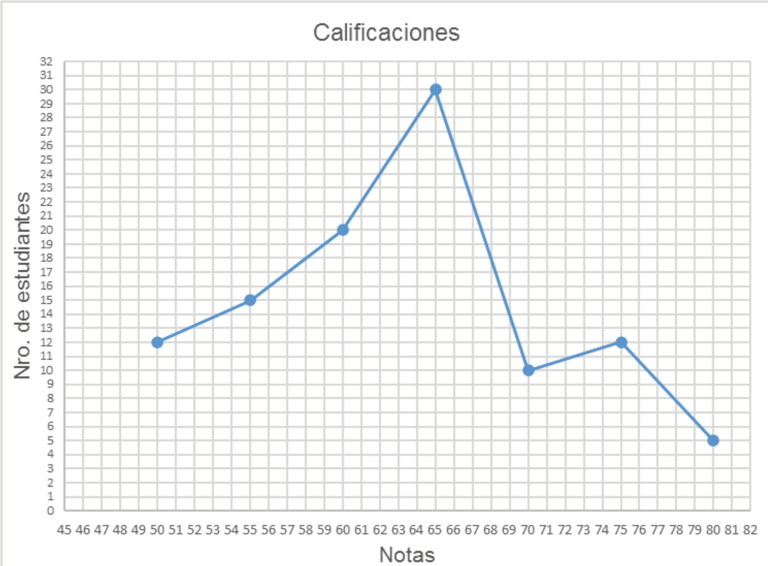
El promedio de los años de servicio es $\bar{X} = 13{,}45$, por tanto:

$$D_{\bar{X}} = 0{,}81$$

Respuestas

El 10% de los empleados tiene 15 años de servicio y la desviación media es de 0,81.

1418. La siguiente gráfica contiene las notas de un examen sorpresa, ¿cuánto es el promedio y la desviación media de la variable notas?



Resolución

Tabulamos la información de la gráfica para obtener los valores necesarios en los cálculos del promedio y la desviación media:

Notas x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$\lvert x_i - \overline{X} \rvert \cdot n_i$
50	12	600	150,64
55	15	825	123,3
60	20	1200	64,4
65	30	1950	53,4
70	10	700	67,8
75	12	900	141,36
80	5	400	83,9
Total: 455	104	6575	692,8

Así, $\overline{X} = \frac{6575}{104} = 63{,}22$ y $D_{\overline{X}} = \frac{692{,}8}{104} = 6{,}66.$

Respuestas

El promedio de la variable notas es de 63,22 y su correspondiente desviación media es de 6,66.

1419. Una muestra tiene una media de 28 y la sumatoria de los datos es igual a 560, ¿cuántos elementos tiene esta muestra?

Datos

$\sum x_i = 560$

$\bar{X} = 28$

Incógnita: n

Resolución

De la fórmula de la media y reemplazando datos:

$$28 = \frac{560}{n} \Rightarrow n = \frac{560}{28} = 20$$

Respuesta

Esta muestra contiene 20 elementos.

1420. Para las siguientes muestras:

$$1, 5, 7, 5, 2, 5, 4$$

y

$$3, 4, 2, 4, 6, 5, 5, 3$$

si las ordenamos de manera decreciente (de mayor a menor), ¿cómo afecta a los valores de la mediana y la moda?

Resolución

Ordenando decrecientemente la primera muestra:

$$7, 5, 5, 5, 4, 2, 1$$

La mediana de esta muestra es $Me_1 = 5$, que está en la cuarta posición y la moda $Mo = 5$.

Ahora ordenando crecientemente:

$$1, 2, 4, 5, 5, 5, 7$$

La mediana es $Me_2 = 5$, que está en la cuarta posición y la moda también es $Mo = 5$.

Para la segunda muestra ordenamos de manera creciente:

$$2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6$$

La mediana es 4 y las modas son 3,4 y 5.

Ordenando de manera decreciente:

$$6, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2$$

La mediana es 4 y las modas son 5,4 y 3.

Respuestas

Para estas dos muestras, el ordenarlas de manera decreciente a cada una no cambia los valores de la mediana y la moda.

1421. Considere la siguiente muestra de edades de un grupo de personas:

22, 25, 30, 34, 35, 40, 45, 50, 55, 60

Se pide encontrar el primer cuartil $°Q_1$ e interpretar el resultado.

Resolución

Sabiendo que $n = 12$, tenemos que $°Q_1$ está en la posición $\frac{10+1}{4} = 2,75$.

Luego su valor es:

$$°Q_1 = 25 + (30 - 25) \cdot 0,75 = 28,75$$

Respuesta

El 25% de las personas tiene una edad de 28,75 años aproximadamente.

1422. Los ingresos mensuales de un grupo de familias en bolivianos son:
2000, 2200, 2400, 2600, 2800, 3000, 3200, 3400, 3600, 3800, 4000, 4200.
Calcular el cuartil $°Q_3$ e interpretar el resultado.

Resolución

Como $n = 12$, la posición del cuartil $°Q_3$ en la muestra es $\frac{3\cdot(12+1)}{4} = 9,75$.
El dato que corresponde a x_9 en la muestra ordenada es 3600:

$$°Q_3 = 3600 + (3800 - 3600) \cdot 0,75 = 3750$$

Respuesta

El 75% de las familias percibe ingresos menores a Bs 3750.

1423. Los pesos en kilogramos de un grupo de personas son:

45, 50, 55, 60, 70, 80, 85, 90, 100, 105, 120 .

¿Cuál es el porcentaje de personas que pesa menos de 81 kg?

Resolución

Se procede a calcular el sexto decil $°D_6$, cuya posición es $\frac{6}{10}(11 + 1) = 7,2$. Así:

$$°D_6 = 80 + (85 - 80) \cdot 0,20 = 81$$

Respuesta

El 60% de las personas pesa menos de 81 kg.

1424. Las velocidades (en $\mathrm{km/h}$) de varios vehículos son:

$$45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 90, 95, 100$$

¿Qué interpretación se tiene para el percentil veintitrés $°P_{23}$?

Resolución

Al calcular $°P_{23}$, ubicamos su posición en la muestra ordenada:

$$\frac{23}{100}(11+1) = 2{,}76$$

Así:

$$°P_{23} = 50 + (55-50)\cdot 0{,}76 = 53{,}8$$

Respuestas

El 23% de los vehículos tienen una velocidad de al menos 53,8 $\mathrm{km/h}$.

1425. Encuentre el 73-avo percentil en la muestra, que corresponde a las temperaturas diarias (en $°C$) de una ciudad durante 10 días:

$$15, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 35$$

Resolución

Al calcular el 73-avo percentil $°P_{73}$, ubicamos su posición:

$$\frac{73\cdot(10+1)}{100} = 8{,}03$$

que corresponde a $x_8 = 30$.

Así:

$$°P_{73} = 30 + (32-30)\cdot 0{,}03 = 30{,}06$$

Respuesta

El 73-avo percentil de la muestra es aproximadamente 30,06.

1426. Los tiempos (en minutos) que tardan los empleados en llegar al trabajo son:

$$10, 15, 20, 25, 30, 40, 50$$

Determinar el octavo decil e interpretar el resultado.

Resolución

Se procede a calcular el sexto decil $°D_8$, cuya posición es $\frac{8(7+1)}{10} = 6{,}4$. Así:

$$°D_8 = 40 + (50-40)\cdot 0{,}40 = 44$$

Respuesta

El 80% de los empleados demora 44 minutos o menos en llegar al trabajo.

1427. Los siguientes datos representan las puntuaciones de en un test aplicado a un grupo de estudiantes:

$$48, 51, 55, 60, 71, 83, 95, 100$$

Encontrar los valores de la varianza y la desviación estándar.

Resolución

Se calculan el promedio y la varianza tabulando los datos:

	Puntos x_i	$(x_i - \bar{X})^2$
	48	500,86
	51	375,58
	55	236,54
	60	107,74
	71	0,38
	83	159,26
	95	606,14
	100	877,34
TOTAL	**563**	**357,98**

Donde:

$$\bar{X} = \frac{563}{8} = 70{,}38$$

y la varianza toma el valor:

$$V = \sum_{i=1}^{8} \frac{(x_i - 70{,}38)^2}{8} = 357{,}98$$

De modo que $\sigma = \sqrt{357{,}98} = 18{,}92$.

Respuesta

La varianza es 357,98 y la desviación estándar es 18,92.

1428. Dos conjuntos de datos tienen las siguientes medias y desviaciones estándar:

- Conjunto A: $\bar{X}_A = 50, \sigma_A = 5$

- Conjunto B: $\bar{X}_B = 100, \sigma_B = 8$

Se pide calcular el coeficiente de variación para cada conjunto y determinar cuál tiene mayor dispersión relativa.

Resolución

Se calcula el coeficiente de variación del conjunto A:

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{|50|} = \frac{5}{50} = 0{,}1$$

o en porcentaje, $CV_A = 10\%$.

El coeficiente de variación del conjunto B:

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{|100|} = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

o en porcentaje: $CV_B = 8\%$.

Respuesta

Los datos del conjunto A están un poco mas dispersos que los datos del conjunto B

1429. Los datos de dos conjuntos tienen el mismo valor como promedio. Los valores del conjunto A son 25, 30, 35, mientras que los del conjunto B son 10, 30, 35.
Comparar las varianzas y desviaciones estándar de ambos conjuntos.

Resolución

Para el conjunto A, calculamos su varianza:

$$V_A = \sigma_A^2 = \frac{(25-30)^2 + (30-30)^2 + (35-30)^2}{3} = 16{,}67$$

Luego su desviación típica es $\sigma_A = 4{,}08$.

Para el conjunto B, calculamos la varianza:

$$V_B = \sigma_B^2 = \frac{(10-30)^2 + (30-30)^2 + (50-30)^2}{3} = 266{,}67$$

y luego su su desviación típica es $\sigma_B = 16{,}33$.

Respuesta

Comparando los resultados, observamos tanto la varianza como la desviación típica de A, son menores que los valores de la varianza y la desvaición típica de B, respectivamente.

1430. Un conjunto de datos tiene los siguientes valores y frecuencias:

- Valor: 10; frecuencia: 3.
- Valor: 20; frecuencia: 5.
- Valor: 30; frecuencia: 2.

¿Cuáles son los valores de la varianza y desviación estándar?

Resolución

Se debe encontrar la media aritmética:

$$\bar{X} = \frac{10 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 30 \cdot 2}{3 + 5 + 2} = 19$$

Para el conjunto A, calculamos la varianza:

$$V = \sigma = \frac{3 \cdot (10 - 19)^2 + 5 \cdot (20 - 19)^2 + 2 \cdot (30 - 19)^2}{3} = 163{,}3$$

Luego su desviación típica es $\sigma = \sqrt{163{,}3} = 12{,}78$.

Respuesta
La varianza es igual a 163,3 y la desviación estándar es igual a 12,78.

1431. Dos máquinas A y B, producen barras de metal con las siguientes características:

- Máquina A: barras con longitud promedio de $\bar{X}_A = 10$ cm, $\sigma_A = 1$ cm.
- Máquina B: barras con longitud promedio de $\bar{X}_B = 100$ mm, $\sigma_B = 10$ mm.

Comparar la dispersión de las dos máquinas usando el coeficiente de variación.

Resolución

Para la máquina A:

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{X}_A} \cdot 100\% = \frac{1}{10} \cdot 100\% = 10\%$$

Para la máquina B:

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{X}_B} \cdot 100\% = \frac{10}{100} \cdot 100\% = 10\%$$

Respuesta
La dispersión es la misma en ambas máquinas, pues las unidades de medida son equivalentes (10 mm =1 cm).

1432. Sean a_1, a_2 y a_3 datos de una variable cuantitativa de una muestra, ¿por qué se puede concluir que su varianza es siempre no negativa?

Resolución

Dado el promedio $\bar{X} = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}$, procedemos a calcular la varianza:

$$V = \frac{(a_1-\bar{X})^2+(a_2-\bar{X})^2+(a_3-\bar{X})^2}{3}$$

$$= \frac{(a_1-\bar{X})^2}{3}+\frac{(a_1-\bar{X})^2}{3}+\frac{(a_1-\bar{X})^2}{3}$$

Pongamos atención a cada sumando de la fracción anterior:

$(a_1-\bar{X})^2 \geq 0$ y $\frac{1}{3}>0$; $(a_2-\bar{X})^2 \geq 0$ y $\frac{1}{3}>0$; $(a_3-\bar{X})^2 \geq 0$ y $\frac{1}{3}>0$

Luego $\frac{(a_1-\bar{X})^2}{3} \geq 0$; $\frac{(a_2-\bar{X})^2}{3} \geq 0$; $\frac{(a_3-\bar{X})^2}{3} \geq 0$ y la suma conservará la desigualdad, es decir:

$$V = \frac{(a_1-\bar{X})^2}{3}+\frac{(a_2-\bar{X})^2}{3}+\frac{(a_3-\bar{X})^2}{3} \geq 0$$

Dato Importante

Para *a,b* números reales:

Si $a>0, b\geq 0$ o $a \geq 0, b>0$ entonces $a \cdot b \geq 0$.

Respuesta

La varianza de esta muestra es siempre no negativa, pues los sumandos que la componen son cuadrados de un número, los cuales son siempre mayores o iguales a cero.

1433. La siguiente tabla muestra los valores de una variable bidimensional:

x_i	0,35	1,32	1,24	0,17	−0.12
y_i	0,33	0,63	1,55	0,46	0,21

Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación.

Resolución

Se tabulan los datos para calcular la covarianza:

	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
	0,35	0,33	2	0,12	0,10
	1,32	0,63	9	1,74	0,40
	1,24	1,55	8	1,54	2,40
	0,17	0,46	20	0,03	0,21
	−0,12	0,21	24	0,01	0,04
TOTAL	2, 96	3, 18	2, 98	3, 44	3, 15

Con los datos de la fila TOTAL, calculamos la media de los x_i:

$$\bar{X} = \frac{2{,}96}{5} = 0{,}59$$

y la media de los y_i:

$$\bar{Y} = \frac{3{,}18}{5} = 0{,}64$$

Luego la covarianza es:

$$\sigma_{xy} = \frac{2{,}98}{5} - 0{,}59 \cdot 0{,}64 = 0{,}22$$

Las respectivas desviaciones estándar son $\sigma_x = 0{,}58$ y $\sigma_y = 0{,}47$.

De todo lo anterior, obtenemos el valor del coeficiente de correlación r:

$$r = \frac{0{,}22}{0{,}58 \cdot 0{,}47} = 0{,}81$$

Respuesta

La covarianza es 0,22 y el coeficiente de correlación es igual a 0,81.

1434. Los siguientes datos representan las calificaciones de 5 estudiantes en dos asignaturas:

Estudiante	Asignatura A(x_i)	Asignatura B(y_i)
1	85	78
2	90	88
3	75	84
4	80	70
5	95	92

Encontrar el coeficiente de correlación entre las asignaturas A y B e interpretar el resultado.

Resolución

Se tabulan los datos para facilitar los cálculos de la covarianza y las varianzas de las variables x_i e y_i:

	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
	85	78	6 630	7 225	6084
	90	88	7 920	8 100	7744
	75	84	6 300	5 625	7056
	80	70	5 600	6 400	4900
	95	92	8 740	9 025	8464
TOTAL	425	412	35 190	36 375	34 248

Se calculan los promedios de x_i e y_i:

$$\bar{X} = 85;\ \bar{Y} = 82{,}4$$

Los valores de las varianzas σ_1 y σ_2 son:

$$\sigma_1 = 7{,}07;\ \sigma_2 = 7{,}74$$

y el de la covarianza es $\sigma_{xy} = 34$. Así el coeficiente de correlación es:

$$r = \frac{34}{7{,}07 \cdot 7{,}74} = 0{,}62$$

Respuesta

La correlación r = 0,62 es fuerte, pues *r* es un valor que no es cercano a cero y 0,62∈ (-1,1).

1435. Elaborar una tabla de doble entrada con los siguientes datos:

x_i	2	3	7	8	9	10	11
y_i	4	9	16	24	30	34	38

¿Qué se puede deducir del resultado?

Resolución

Se tabulan los datos para facilitar los cálculos:

(x_i) / (y_i)	2	3	7	8	9	10	11	TOTAL
4	1							1
9		1						1
16			1					1
24				1				1
30					1			1
34						1		1
38							1	1
TOTAL	1	1	1	1	1	1	1	7

Respuesta

La tabla de doble entrada de dos variables con valores distintos entre sí, imita una disposición diagonal.

1436. Elaborar las respectivas tablas marginales a partir de la siguiente tabla de doble entrada:

(y_i) \ (x_i)	2	3	7	8	Total
4	7	2	5	8	22
9	5	1	6	4	16
16	2	3	1	2	8
Total	14	6	12	14	46

Respuestas

La tabla marginal de la variable x_i es:

x_i	2	3	7	8	
n_i	14	6	12	14	46

La tabla marginal de la variable y_i es:

y_i	4	9	16	
n_i	22	16	8	46

1437. Suponga que los siguientes datos corresponden a la altura (en cm) y peso (en kg) de cinco personas:

Altura: 150,160,170,180,190

Peso: 50, 60, 70, 80, 90

Se pide encontrar la ecuación de la línea de regresión para predecir el peso basado en la altura.

Resolución

Se encuentra la ecuación de la recta de regresión, identificando la altura (x_i) como la variable independiente y el peso (y_i) como la variable dependiente.

Calculamos la media, la covarianza y la varianza de x_i tabulándolos con $n = 5$:

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
150	50	7500	22 500
160	60	9600	25 600
170	70	11 900	28 900
180	80	14 400	32 400
190	90	17 100	36 100
850	70	60 500	145 500

Los respectivos promedios son: $\bar{X} = \frac{850}{5} = 170$ y $\bar{Y} = 70$.

La varianza es $V_x = \sigma_x^2 = \frac{145\ 500}{5} - (170)^2 = 200$.

La covarianza es $\sigma_{xy} = \frac{60\ 500}{5} - 170 \cdot 70 = 200$.

Así la recta de regresión de y sobre x, viene dada por:

$$y - \bar{Y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{X})$$

Reemplazando:

$$y - 70 = 1 \cdot (x - 170)$$

Respuesta

La ecuación de la recta que permite hacer predicciones del peso basado en la altura es $y = x - 100$.

1438. Un heladero quiere predecir sus ventas en función a las temperaturas, para ello se tienen los siguientes datos:

Temperatura (en °C): 10, 15, 20, 25, 30

Ventas (en miles): 4, 5, 6, 7, 8

¿Cuánto serán las ventas para una temperatura de 33°C.

Resolución

Se encuentra la ecuación de la recta de regresión, identificando a Temperatura (x_i) como la variable independiente y a Ventas (y_i) como la variable dependiente.

Calculamos la media, la covarianza y la varianza de x_i tabulando los datos con $n = 5$:

	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
	10	4	40	100
	15	5	75	225
	20	6	120	400
	25	7	175	625
	30	8	240	900
TOTAL	95	30	650	2250

Los respectivos promedios son: $\bar{X} = \frac{95}{5} = 19$ y $\bar{Y} = 6$.

La varianza es $V_x = \sigma_x^2 = \frac{2250}{5} - (19)^2 = 89$.

La covarianza es $\sigma_{xy} = \frac{650}{5} - 19 \cdot 6 = 16$.

Así la recta de regresión de y sobre x, viene dada por:

$$y - \bar{Y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{X})$$

Reemplazando:

$$y - 6 = 5{,}56 \cdot (x - 19)$$

Haciendo $x = 33$, tenemos

$$y = 5{,}56 \cdot 33 - 105{,}64 + 6 = 83{,}84 \approx 84$$

Respuesta

Se estima que las ventas de helados para una temperatura de $33°C$, serán de 84 unidades.

1439. Se ha pesado a 40 deportistas (ver tabla), ¿qué porcentaje de deportistas pesan no menos de 111 kilogramos?

Intervalo de clase	n_i
$[90, 97)$	7
$[97, 104)$	9
$[104, 111)$	13
$[112, 119)$	3
$[119, 126)$	4
$[126, 133)$	3
$[133, 140)$	1
TOTAL	40

Resolución

Elaboramos la tabla de distribución de frecuencias:

Clase	X_i	n_i	f_i	N_i	F_i
$[90,97)$	93,5	7	0,175	7	0,175
$[97,104)$	100,5	9	0,225	16	0,4
$[104,111)$	107,5	13	0,325	29	0,725
$[111,119)$	115	3	0,075	32	0,8
$[119,126)$	122,5	4	0,1	36	0,9
$[126,133)$	129,5	3	0,075	39	0,975
$[133,140)$	136,5	1	0,025	40	1
TOTAL		40	1		

Para $F_3 = 0{,}725 = 72{,}5\%$ de los deportistas pesan entre 90 y 111 kg.

Respuesta

El 27,5% de los deportistas pesa no menos de 111 kg.

1440. Para la siguiente tabla de distribución de frecuencias:

Intervalo de clase	n_i	N_i	f_i	F_i
$[10,20)$			0,1	
$[20,30)$				
$[30,40)$	24		0,3	
$[40,50)$	30			0,85
$[50,60)$				

Encontrar el valor de $n_1 + n_3 + N_4$

Datos

$f_1 = 0{,}1$

$f_3 = 0{,}3$

$n_3 = 24$

$n_4 = 30$

$F_4 = 0{,}85$

Incógnita:

$n_1 + n_3 + N_4$

Resolución

De los datos: $f_3 = 0{,}3 = \frac{24}{n} \Rightarrow n = 80.$

Luego $f_4 = \frac{30}{80} = 0{,}375$ y $F_3 = 0{,}85 - 0{,}36 = 0{,}475$

Por otra parte, $f_2 = 0{,}075$ y como

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1$$

entonces $f_5 = 0{,}15.$

De este modo es posible conocer cada una de las frecuencias absolutas, en particular:

$$n_1 = 8; n_2 = 6$$

Luego $N_2 = 14$, $N_3 = 38$ y $N_4 = 68.$

Respuesta

El resultado es $n_1 + n_3 + N_4 = 8 + 24 + 68 = 100.$

1441. La tabla muestra la distribución sobre el peso (en toneladas t) de la producción de un grupo de 50 productores de alimentos:

Intervalo de clase	n_i	F_i
$[155, 160)$		
$[165, 170)$		
$[170, 175)$		
$[175, 180)$	5	0,96
$[185, 190)$		

Encontrar el porcentaje de la producción no menor a 170 toneladas, si se sabe que: $f_1 = f_5$ y $f_2 = f_4$.

Datos

$f_1 = f_5$

$f_2 = f_4$

$n_4 = 5$

$F_4 = 0{,}96$

Incógnita: F_3

Resolución

Se deduce de los datos que:

$$f_4 = \frac{5}{50} = 0{,}1$$

y con esto se obtiene:

$$F_3 = 0{,}96 - 0{,}1 = 0{,}86 = 86\%$$

de donde 100% - 86% = 14%

Respuesta

El porcentaje correspondiente a la producción no menor a 170 toneladas en el 14%.

1442. Para la siguiente distribución de frecuencias, determinar la diferencia entre la mediana y la media.

Intervalo de clase	n_i	N_i
$[280, 320)$	4	4
$[320, 380)$	16	20
$[380, 540)$	88	108
$[540, 600)$	40	148
$[600, 1000)$	13	161

Resolución

Con $n = 161$, se calcula la mediana identificando su posición: $\frac{n+1}{2} = 81$
El intervalo que contiene a la mediana es [380, 540).
Luego $L = 380, F = 20, f_3 = 88$ y $h = 160$ y reemplazando:

$$Me = 380 + \left(\frac{\frac{161+1}{2} - 20}{88}\right) \cdot 160 = 490{,}91$$

Para calcular el promedio, tabulamos las marcas de clase:

Intervalo de clase	X_i	n_i	$X_i \cdot n_i$
$[280, 320)$	300	4	1200
$[320, 380)$	350	16	5600
$[380, 540)$	460	88	40 480
$[540, 600)$	570	40	22 800
$[600, 1000)$	800	13	10 400
TOTAL		161	80 480

Así, $\bar{X} = \frac{80\,480}{161} = 499{,}86$ y $\bar{X} - Me = 499{,}86 - 490{,}91 = 8{,}95$

Respuesta
La diferencia entre la media y la mediana es 8,95.

1443. La tabla muestra información de un grupo de personas respecto a su gasto diario.
Hallar el valor de k para hallar los valores de f_i.

Gasto diario (en Bs)	f_i
$[10, 20)$	$\frac{k}{25}$
$[20, 30)$	$\frac{3k}{50}$
$[30, 50)$	$\frac{k}{50}$
$[50, 60)$	$\frac{3k}{50}$
$[60, 70)$	$\frac{k}{20}$

Resolución

Sabiendo que $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1$ o equivalentemente, de la tabla:

$$\frac{k}{25} + \frac{3k}{50} + \frac{k}{50} + \frac{3k}{50} + \frac{k}{20} = 1$$

entonces

$$k \cdot \left(\frac{1}{25} + \frac{3}{50} + \frac{1}{50} + \frac{3}{50} + \frac{1}{20}\right) = 1 \Rightarrow k = 4{,}35$$

Respuesta

El valor de k es 4,35 y los valores de f_i son:

$$f_1 = 0{,}17;\ f_2 = 0{,}26; f_3 = 0{,}09;\ f_4 = 0{,}26$$

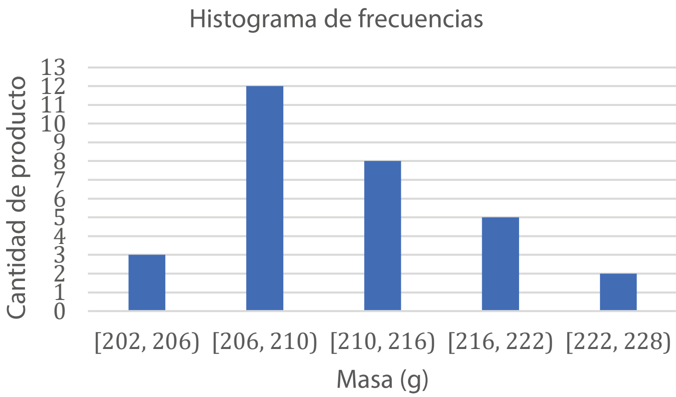
1444. En control de calidad, una empresa registró los pesos en gramos de sus productos emblema:

Peso (g)	Cantidad de productos
$[202, 206)$	3
$[206, 210)$	12
$[210, 216)$	8
$[216, 222)$	5
$[222, 228)$	2

Mostrar un histograma para representar los datos y calcular el promedio de frecuencias.

Resolución

El histograma que representa a los intervalos de clase es el siguiente:



Para calcular el promedio, se tabulan los datos:

Peso (g)	X_i	n_i	$X_i \cdot n_i$
$[202, 206)$	204	3	612
$[206, 210)$	208	12	2496
$[210, 216)$	213	8	1704
$[216, 222)$	219	5	1095
$[222, 228)$	225	2	450
TOTAL		30	6357

Luego $\bar{X} = \frac{6357}{30} = 211{,}9$

Respuesta

El promedio es igual a 211,9, cuyo intervalo de clase que lo contiene es $[210{,}216)$.

1445. Juan ahorra Bs 1000 en una cuenta que paga un interés simple del 5% anual, ¿cuánto dinero percibirá Juan en concepto de intereses al cabo de 3 años?

Datos

$C_0 = 1000$
$r = 5\% = 0{,}05$
$t = 3$
Incógnita:
I

Resolución

Reemplazando datos en la fórmula del cálculo de interés simple:

$$I = C_0 \cdot r \cdot t = 1000 \cdot 0{,}05 \cdot 3 = 150$$

Respuesta

Juan percibirá intereses de Bs 150 al cabo de 3 años.

1446. María invierte Bs 2000 en una cuenta que paga un interés compuesto del 4% anual, ¿cuánto tendrá María pasado 5 años?

Datos

$C_0 = 2000$
$r = 4\% = 0{,}04$
$t = 5$
Incógnita: C_f

Resolución

Reemplazando datos en la fórmula del interés compuesto:

$$C_f = 2000 \cdot (1 + 0{,}04)^5 = 2433{,}31$$

Respuesta

Al cabo de 5 años, María percibirá Bs 2433,28.

1447. Pedro desea recibir Bs 500 al final de cada mes durante 3 años, ¿cuánto dinero debe depositar ahora en una cuenta que paga un interés del 4% anual, compuesto mensualmente para cumplir su objetivo?

Datos

$R = 500$
$r = 6\% = 0{,}06$
n: número de pagos
$n = 12$
$t = 3$ (en años)
Incógnita: C

Resolución

El capital C a invertir viene dado por la siguiente expresión, la cuál al reemplazar datos queda:

$$C = 500 \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{0{,}04}{12}\right)^{12\cdot 3}}}{\dfrac{0{,}04}{12}} = 16\,935{,}38$$

Respuesta

Pedro debe depositar un monto aproximado de Bs 16 935,38.

1448. Sofía desea ahorrar para la educación universitaria de su hijo, que comienza en 10 años. Ella estima que necesitará Bs 20 000 al inicio de cada año, durante 4 años. Si puede obtener un interés compuesto del 6% anual, ¿cuánto debe depositar ahora?

Datos

$C = 20\,000$
$r = 4\% = 0{,}06$
$t = 10{,}11{,}12{,}13$ (en años)
Incógnita:
$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Resolución

Los pagos de Bs 20 000 se realizarán al inicio de cada año durante 4 años, comenzando en 10 años. Así que necesitamos calcular el valor presente de cada uno de estos pagos al inicio de los años 10,11,12 y 13.

Para el primer año (terminando el noveno año):

$$A_1 = \frac{20\,000}{(1 + 0{,}06)^{10}} = 11\,167{,}90$$

Para el segundo año (terminando el décimo año):

$$A_2 = \frac{20\,000}{(1 + 0{,}06)^{11}} = 10\,535{,}75$$

Para el tercer año (terminando el onceavo año):

$$A_3 = \frac{20\,000}{(1 + 0{,}06)^{12}} = 9939{,}39$$

Para el cuarto año (terminando el doceavo año):

$$A_4 = \frac{20\,000}{(1+0{,}06)^{14}} = 9376{,}78$$

Así:

$$A = 11\,167{,}90 + 10\,535{,}75 + 9939{,}39 + 9376{,}78 = 41\,019{,}82$$

Respuesta

Sofía debe depositar ahora aproximadamente Bs 41,019.82 para cubrir los pagos de Bs 20,000 al inicio de cada uno de los cuatro años, comenzando en 10 años, si obtiene un interés compuesto del 6% anual.

1449. Carlos tiene dos opciones de préstamo para comprar un coche: un préstamo de Bs 10 000 al 5% anual durante 4 años o un préstamo de Bs 10 000 al 4% anual durante 3 años, ¿cuál opción tiene el menor pago mensual?

Datos

$P = 10\,000$

$r_1 = 5\% = 0{,}05$

n: número de pagos

$r_2 = 4\% = 0{,}04$

$n = 12$

$t_1 = 4$ (en años)

$t_2 = 3$

Incógnita:

M_1, M_2: Mensualidades

Resolución

Recurrimos a la fórmula de la anualidad para calcular los pagos mensuales.

Para el préstamo de 4 años al 5%:

$$M_1 = \frac{10\,000 \cdot \frac{0{,}05}{12}}{1-\left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{-12\cdot 4}} = 230{,}29$$

Para el préstamo de 3 años al 4%:

$$M_2 = \frac{10\,000 \cdot \frac{0{,}04}{12}}{1-\left(1+\frac{0{,}04}{12}\right)^{-12\cdot 3}} = 295{,}24$$

Respuesta

El préstamo de 4 años al 5% tiene el menor pago mensual (Bs 230,29).

1450. Ana invierte en un fondo mutuo un monto de Bs 5000 que rinde un 6% anual. Si deja su inversión por 10 años, ¿cuántos tendrá al final?

Datos

$C_0 = 5000$
$r = 0{,}06$
$t = 10$
Incógnita:
C_f: Capital final

Resolución

Reemplazamos datos en la fórmula del interés compuesto como sigue:

$$A = 5000 \cdot (1 + 0{,}06)^{10} = 8954{,}24$$

Respuesta

El monto final por su inversión al cabo de 10 años será de Bs 8954,24.

Recolección, organización de datos y tipos de variables

1451. Un grupo de estudiantes que estaban ingresando a la biblioteca municipal, fueron consultados vía una encuesta por pantalla digital acerca de su participación en actividades culturales. La información recolectada incluye las siguientes:

- Edad
- Inclinación a participar (nula, poca, normal, alta, muy alta)
- Tipo de actividad cultural (Danza, Música, Teatro, Pintura, Otro)
- Cantidad de participaciones en actividades culturales en la última semana.

¿Cuál de las variables corresponde a una cualitativa ordinal?

a) Edad
b) Inclinación a participar (nula, poca, normal, alta, muy alta)
c) Tipo de actividad cultural
d) Cantidad de participaciones en actividades culturales en la última semana.

Respuesta: .....

1452. Se recopiló los hábitos de estudio en estudiantes de una unidad educativa, recopilaron vía cuestionario en línea, cuya información recolectada incluía las siguientes variables:

- Nombre completo del estudiante
- Edad
- Número de horas de estudio por día.
- Método de estudio preferido (Lectura, Escritura, Videos educativos, grupos de estudio, Otros).

¿Cuál de las variables corresponde a una cualitativa ordinal?

a) Edad
b) Número de horas de estudio por día.
c) Método de estudio preferido (Lectura, Escritura, Videos educativos, grupos de estudio, Otros).
d) Ninguno

Respuesta: .....

1453. Un grupo de estudiantes de secundaria decide realizar una encuesta sobre los hábitos alimenticios de sus compañeros. Encuestan a 500 compañeros del colegio y obtienen los siguientes datos sobre la cantidad de veces que consumen frutas y verduras por semana:

Cantidad por semana	N° de estudiantes
$0-1$	50
$2-3$	100
$4-5$	150
$6-7$	200

¿De qué tipo es la variable "N° de estudiantes"?

a) Nominal b) Ordinal c) Discreta d) Continua

Respuesta: .....

1454. De los 500 empleados de una empresa, se encuestó a un grupo concreto acerca de qué actividades hace en su tiempo de vacaciones:

Actividad	Viajar	Deportes	Lectura	Otros
N° de personas	48	78	50	80

¿Cuál es la cantidad de datos de la muestra?

a) 256 b) 500 c) 300 d) 244

Respuesta: .....

1455. Una empresa de transporte de pasajeros, recopiló información acerca de la satisfacción del servicio prestado de 200 usuarios:

Respuesta	Nada satisfecho	Poco satisfecho	Satisfecho	Muy satisfecho
N° de personas	70	95	20	15

¿A cuál variable está asociada la característica "Satisfecho"?

a) N° de personas
b) Satisfacción del servicio
c) Usuarios
d) Ninguno

Respuesta: .....

1456. En una encuesta sobre hábitos de lectura, un investigador quiere estudiar los hábitos de lectura de los estudiantes de cierta unidad educativa. Se sabe que hay 800 estudiantes inscritos, de los cuales el investigador selecciona 80 de ellos al azar, ¿cuál es la población y la muestra en este estudio?

a) Población: 80 estudiantes y Muestra: 800 estudiantes.
b) Población: Todos los estudiantes del país y Muestra: 800 estudiantes
c) Población: 800 estudiantes y Muestra: 80 estudiantes.
d) Población: Todos los estudiantes del país y Muestra: 80 estudiantes.

Respuesta: .....

1457. Una agencia de publicidad quiere saber cuántas personas ven su anuncio en una ciudad. Se sabe que la ciudad tiene 100 000 habitantes y la agencia entrevistó a 10 000 personas al azar:
¿cuál es la población y la muestra en este estudio?

a) Población: Todos los habitantes del país y Muestra: 100 000 habitantes.
b) Población: Todos los hombres de la ciudad y Muestra: 10 000 habitantes.
c) Población: Todos los 100 000 habitantes de la ciudad y Muestra: 10 000 personas al azar.
d) Población: 10 000 habitantes Muestra: 100 000 habitantes seleccionados al azar.

Respuesta: .....

1458. Un maestro quiere saber cómo va el aprendizaje de matemática a través de un examen. La clase tiene 30 estudiantes y el maestro revisa las pruebas de 10 estudiantes al azar.
¿Cuál es la población y la muestra en este estudio?

a) Población: Los 10 estudiantes de la clase Muestra: 30 estudiantes.
b) Población: Los estudiantes del colegio y Muestra: 10 estudiantes.
c) Población: Todos los colegio del lugar y Muestra: 30 estudiantes al azar.
d) Población: Los 30 estudiantes de la clase y Muestra: 10 estudiantes elegidos al azar.

Respuesta: .....

Tablas de frecuencias (gráficas)

1459. Para la siguiente muestra:

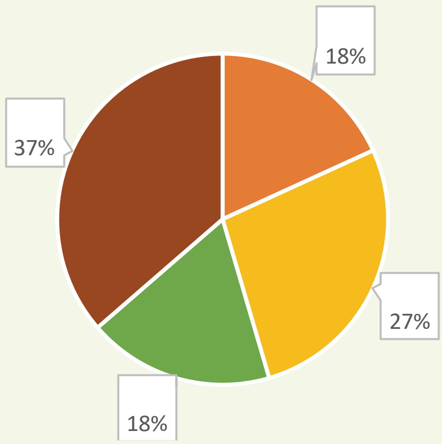
1, 4, 6, 8, 4, 1, 4, 5, 3, 2, 6, 7, 5

¿Cuánto es la frecuencia absoluta del dato 1?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 2

Respuesta: .....

1460. El siguiente diagrama de sectores muestra los porcentajes respecto a las frecuencias relativas y las frecuencias absolutas:



¿Cuáles son los valores de las frecuencias absolutas de la muestra, si hay un total de 100 datos?

a) 37,18,18,27 b) 17,47,28,28 c) 36,36,18,18 d) Ninguno

Respuesta: .....

1461. Los resultados a lanzar 11 veces un dado conforman la siguiente muestra:

6, 3, 4, 1, 6, 5, 6, 3, 2, 1, 4

Si ordenamos de manera decreciente, ¿qué podemos afirmar de la frecuencia absoluta de "4"?

a) El resultado cambia b) Se mantiene igual c) Se duplica d) Se divide a la mitad

Respuesta: .....

1462. Para una tabla de distribución de frecuencias cuyo total de datos es n, la suma de los valores de la columna correspondiente a f_i es:

a) 1 b) 0 c) n d) -1

Respuesta: .....

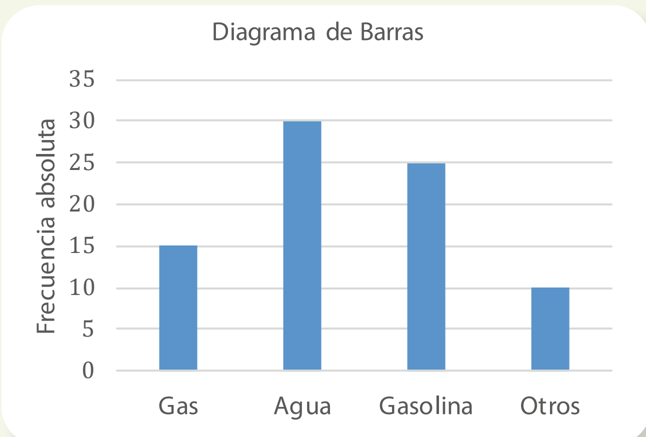
1463. Según los datos de la tabla, ¿cuál es el porcentaje de espectadores que son varones y prefieren la categoría humor?

	Humor	Acción	Documental	Ficción
Varón	80	120	20	30
Mujer	20	10	100	50

a) 23% b) 30% c) 32% d) 40%

Respuesta: .....

1464. Para el siguiente diagrama de barras, ¿cuánto es el valor de la frecuencia relativa para el valor "Agua"?

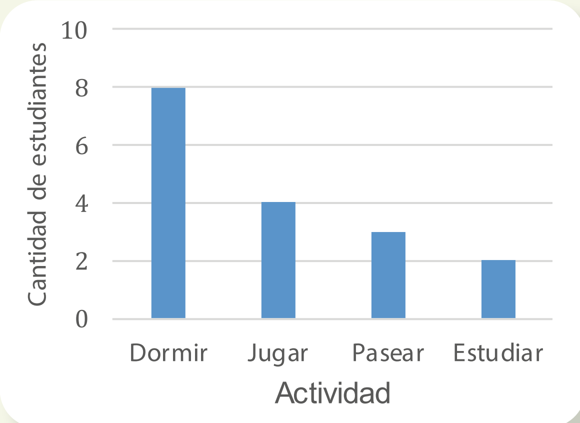


a) 0,60 b) 0,5 c) 0,36 d) 0,65

Respuesta: .....

Medidas de tendencia central

1465. Se encuestó a un grupo de 25 estudiantes sobre sus actividades favoritas en vacaciones y los resultados se muestran en el siguiente diagrama de barras:

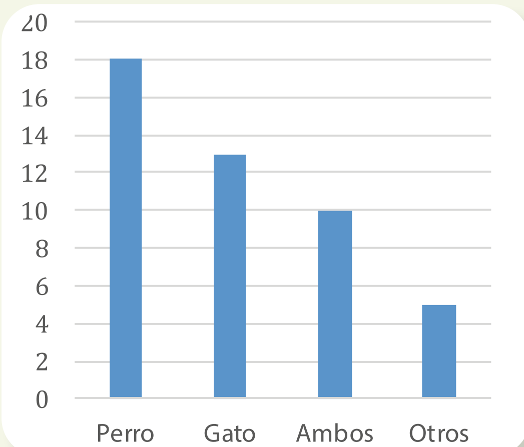


¿Es posible calcular la media de los valores para la variable "Actividad"?

a) Si b) En algunos casos c) La media es 6 d) No se puede calcular

Respuesta: .....

1466. Según el diagrama de barras, ¿cuál es la moda?



a) Perro b) Gato c) Ambos d) Otros

Respuesta: .....

1467. Se tiene la siguiente muestra con datos no agrupados con las alturas correspondientes a 20 niños.
3, 4, 8, 2, 11, 7, 10, 12, 16, 15, 7, 11, 10, 6, 9, 9, 10, 13, 13, 14
¿Cuál es la media y la moda (s)?

a) $\bar{X} = 11 = Mo$
b) $\bar{X} = 9{,}5$, $Mo_1 = 11$ y $Mo_2 = 13$
c) $\bar{X} = 10$ y $Mo = 10$
d) $\bar{X} = 9{,}5$ y $Mo = 10$

Respuesta: .....

1468. El promedio de una muestra es igual a 35. Para el dato numérico 7, se sabe que su diferencia con respecto a la media es negativa, ¿qué se puede concluir respecto a la posición de este dato?

a) Está a la derecha de 35
b) Está a la izquierda de 35
c) $D_{\bar{X}} = 7$
d) No se puede saber.

Respuesta: .....

1469. Cuando la cantidad n de datos numéricos no agrupados y ordenados de una muestra es par, ¿cuál es la posición de la mediana?

a) Me se ubica en la posición $\frac{n}{2}$
b) Me se ubica en la posición $\frac{n+1}{2}$
c) Me se ubica en las posiciones $\frac{n}{2}$ y $\frac{n+1}{2}$.
d) Ninguno

Respuesta: .....

1470. Los tiempos de entrega (en días) de un servicio de mensajería para 6 pedidos son: 2, 3, 5, 7, 8, 10, ¿cuánto es la desviación media de los tiempos de entrega?

a) 2,50
b) 1,17
c) 2,17
d) Ninguno

Respuesta: .....

Cuartiles, deciles y percentiles

1471. Las calificaciones de 12 estudiantes en un examen son:

58, 62, 65, 70, 72, 75, 78, 80, 85, 88, 90, 95

¿Cuál es el porcentaje de estudiantes que obtuvieron una calificación de 66,25 o menos?

a) 25% b) 66% c) 65% d) Ninguno

Respuesta: .....

1472. Las alturas (en cm) de 10 personas son:

150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195

Calcular el percentil 90.

a) 155,4 b) 200,5 c) 145,5 d) 194,5

Respuesta: .....

1473. Los pesos (en kg) de 15 personas son:

8, 60, 63, 65, 67, 70, 72, 75, 78, 80, 82, 85, 88, 90

Calcular el segundo cuartil y compararlo con la mediana, ¿qué conclusión se obtiene?

a) $°Q_2 = 72$ y $Me < °Q_2$ b) $°Q_2 = 72$ y $Me < °Q_2$
c) $°Q_2 = 72$ y $Me = °Q_2$ d) Ninguno.

Respuesta: .....

1474. Los tiempos muertos (en segundos) de una aplicación web para 20 solicitudes son:

1,5; 2; 2,2; 2,5; 2,8; 3; 3,2; 3,5; 3,8; 4; 4,2; 4,5; 4,8; 5; 5,2; 5,5; 5,8; 6; 6,5

¿Qué porcentaje de las solicitudes tiene un tiempo de respuesta de 5,15 segundos o menos?

a) 70% b) 75% c) 80% d) Ninguno

Respuesta: .....

1475. Si el séptimo percentil de los datos de una muestra es igual a 595, determinar el total de datos n que existen en dicha muestra.

a) 8500 b) 8501 c) 8499 d) 8498

Respuesta: .....

1476. Encontrar el percentil $°P_{53}$ para el siguiente conjunto de datos no tabulados:

12, 15, 20, 24, 30, 35, 40, 45, 50, 55

a) 34,15 b) 35,14 c) 35 d) 34

Respuesta: .....

Medidas de dispersión

1477. Los ingresos mensuales (en miles de bolivianos) de 6 empleados son:

2,5; 3; 3,5; 4; 4,5 ;5

Calcular la desviación típica.

a) 0,80 b) 0,90 c) 0,85 d) Ninguno

Respuesta: .....

1478. Las notas más frecuentes de los 4 exámenes de Matemática, Física. Química e Historia son las siguientes:

70, 75, 80, 85

Encontrar la varianza estos datos.

a) 30,25 b) 31,25 c) 35,55 d) Ninguno

Respuesta: .....

Propuestos 05

1479. Si el promedio de una muestra es igual a 53,2 y su desviación es 0,20, ¿dónde se encuentran la mayoría de los datos?

a) Entre 53,4 y 54 b) Entre 54 y 53,4 c) Desde 53,4 d) Desde 54

Respuesta: .....

1480. Los retornos anuales (en %) de una inversión durante 5 años son:

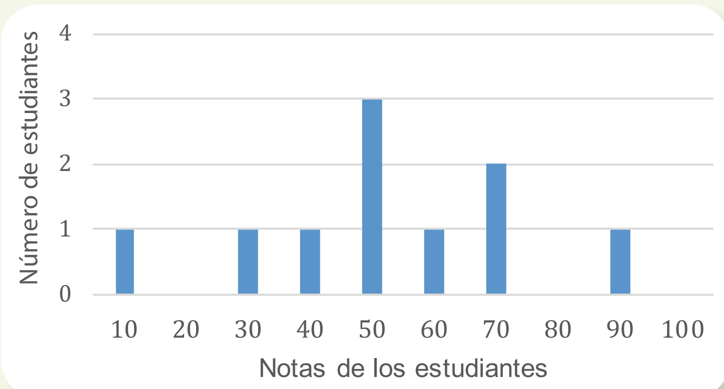
5%, 8%, 2%, 10%, 3%

Encontrar el coeficiente de variación.

a) 87% b) 85% c) 83% d) 82%

Respuesta: .....

1481. Las notas de Estadística de 10 estudiantes se muestran en el diagrama:



¿Cuál es el rango de la variable "Notas de los estudiantes"?

a) 90 b) 80 c) 100 d) 110

Respuesta: .....

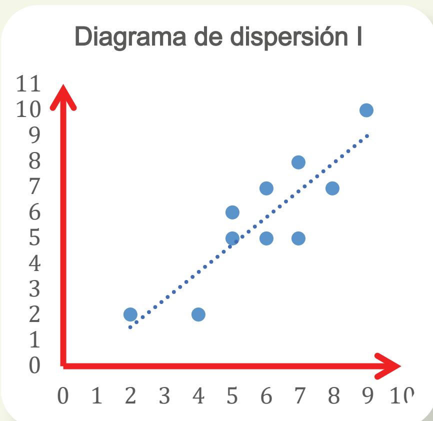
1482. Sean los siguientes conjuntos de datos:
Conjunto A: 55, 60, 65, 70, 75
Conjunto B: 40, 50, 65, 80, 90
Comparar la dispersión de ambos conjuntos, ¿cuál de ellos es el más disperso?

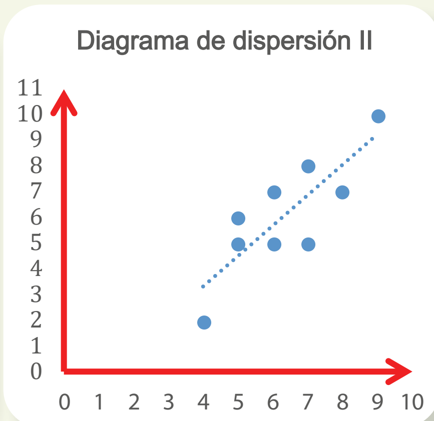
a) A es más disperso que B
b) B es más disperso que A
c) Sus desviaciones coinciden
d) Ninguno

Respuesta: .....

Regresión Lineal

1483. Para los siguientes diagramas de dispersión:





¿Qué tipo de correlación existe?

a) I y II tienen una correlación fuerte y positiva.
b) I tiene una correlación fuerte y positiva y II una correlación débil.
c) I y II tienen una correlación fuerte y negativa.
d) I y II tienen una correlación débil y positiva.

Respuesta: .....

1484. Si para dos conjuntos de datos A,B, sus respectivos coeficientes de correlación r son ambos nulos, ¿qué ocurre con la covarianza?

a) $\sigma_A = \infty$ b) $\sigma_B = \infty$ c) $\sigma_A = 0$ o $\sigma_B = 0$ d) $\sigma_{AB} = 0$

Respuesta: .....

1485. Un grupo de 5 postulantes, fueron examinados mediante dos pruebas A y B, en las cuales se dieron los siguientes resultados:

Prueba A: 65, 70, 75, 80, 85

Prueba B: 70, 75, 80, 85, 90

Encuentre el coeficiente de correlación r para responder lo siguiente: ¿Cuál es la interpretación correcta del coeficiente de correlación r?

a) $r = 1$, luego la correlación de los datos es muy alta.

b) $r = 1$, luego la correlación de los datos es baja.

c) $r = 0$, luego la correlación de los datos es nula.

Respuesta: .....

1486. Considere la tabla de doble entrada:

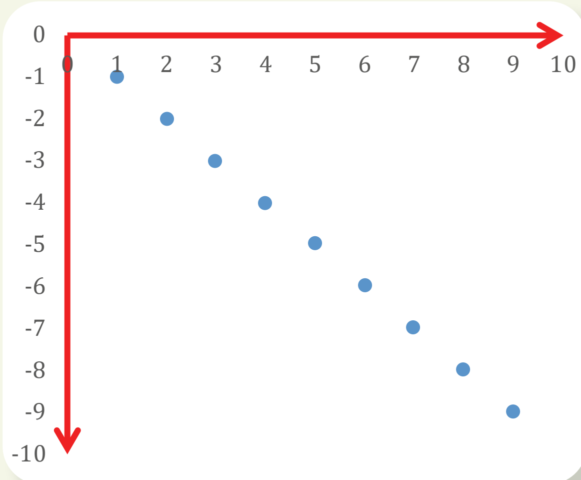
y_i \ x_i	8	9	12	TOTAL
40	7	14	9	30
45	6	8	11	25
50	2	7	7	16
TOTAL	15	29	27	$n = 71$

La pareja de datos para la menor de la frecuencia absoluta es:

a) (8, 45) b) (12, 50) c) (8, 50) d) (9, 50)

Respuesta: .....

1487. El siguiente diagrama de dispersión, tiene un índice de correlación:



a) $r = 0$ b) $r = -1$ c) $r = 1$ d) Ninguno

Respuesta: .....

1488. Sea $y = 5 + x$ la ecuación de la recta de regresión que relaciona los resultados de las pruebas A y B de los postulantes. Estimar la puntuación de x, cuando $y = 100$.

a) $x = 95$ b) $x = -95$ c) $x = 105$ d) Ninguno

Respuesta: .....

1489. La siguiente tabla muestra la distribución de ingresos mensuales (en miles) de un grupo de 80 personas, ¿cuál es la media de los ingresos?

Ingresos (Bs)	n_i
$[0,10)$	5
$[10,20)$	8
$[20,30)$	12
$[30,40)$	15
$[40,50)$	10

a) 27,4 b) 29 c) 28,4 d) 30

Respuesta: .....

Estadística para datos agrupados

1490. Para los datos de la tabla, ¿cuál es el valor de la desviación media $D_{\bar{X}}$?

Intervalo	n_i
[0, 10)	10
[10, 20)	15
[20, 30)	20
[30, 40)	25
[40, 50)	30

a) $D_{\bar{X}} = 13$ b) $D_{\bar{X}} = 11{,}7$ c) $D_{\bar{X}} = 12$ d) $D_{\bar{X}} = 12{,}7$

Respuesta: .....

1491. Para la tabla de datos agrupados, encontrar los valores del primer y el quinto decil $°D_1$ y $°D_5$, respectivamente.

Tiempo (s)	n_i
[5,5; 6)	4
[6,5, 7)	9
[7,5, 8)	15
[8,5, 9)	6
[9,5, 10)	11

a) $°D_1 = 11$; $°D_5 = 19$
b) $°D_1 = 10{,}56$; $°D_5 = 19$
c) $°D_1 = 19$; $°D_5 = 11$
d) Ninguno

Respuesta: .....

1492. Encontrar la mediana correspondiente a los datos agrupados de la tabla, correspondientes a las edades de un grupo de personas.

Edades	n_i
[0, 10)	7
[10, 20)	12
[20, 30)	15
[30, 40)	10
[40, 50)	6

a) 25 b) 24 c) 26 d) 23

Respuesta: .....

1493. ¿Cuál es el valor del 50-avo percentil $°P_{50}$?

Intervalo	n_i
[100, 200)	7
[200, 300)	12
[300, 400)	15
[400, 500)	10
[500, 600)	6

a) $°P_{50} = 350$ b) $°P_{50} = 340$
c) $°P_{50} = 360$ d) Ninguno

Respuesta: .....

1494. La siguiente tabla muestra la distribución del consumo de energía eléctrica (kWh), correspondiente a 80 negocios, ¿cuál es el valor del tercer cuartil $°Q_3$?

Intervalos de consumo	n_i
[160, 170)	12
[170, 180)	48
[180, 190)	10
[190, 200)	5
[200, 210)	4

a) $°Q_3 = 170{,}98$ b) $°Q_3 = 180{,}98$
c) $°Q_3 = 160{,}98$ d) Ninguno

Respuesta: .....

Matemática financiera

1495. El costo total por servicio de limpieza era de Bs 700 por apartamento. Por políticas de la empresa, subió un 17% por el lapso de una semana y pasado esto, bajó un 9%, ¿cuál es el costo final del servicio?

a) 735,29 b) 745,29 c) 755,29 d) Ninguno

Respuesta: .....

1496. Daniel plantea invertir su capital ahorrado de Bs 15 000. En el banco le informan que trabajan con un interés anual del 5%, ¿cuánto dinero percibiría Daniel en intereses al pasar 3 años?

a) Bs 2350 b) Bs 2500 c) Bs 2250 d) Ninguno

Respuesta: .....

1497. Una pareja quiere ahorrar Bs 10 000 para la universidad de su hija en un plazo de 10 años. Si tienen la opción de invertir en una cuenta con un interés compuesto anual del 4%, ¿cuánto deben invertir inicialmente?

a) Bs 6577,64 b) Bs 6657,64 c) Bs 6755,64 d) Bs 6555,34

Respuesta: .....

1498. Un automóvil nuevo tiene un costo de Bs 30 000. Sabiendo que su valor sufre un deprecio del 15% cada año transcurrido, ¿cuál será su valor después de 5 años?

a) Bs 13 311,16 b) Bs 13 144,16 c) Bs 15 311,16 d) Bs 15 144,16

Respuesta: .....

1499. Si una persona decide ahorrar Bs 100 000 para su retiro en 10 años, ¿cuál es el monto que debe ahorrar mensualmente, si puede invertir en una cuenta con interés compuesto anual del 6%?

a) Aproximadamente Bs 61,02 b) Aproximadamente Bs 51,02
c) Aproximadamente Bs 71,02 d) Aproximadamente Bs 41,02

Respuesta: .....

1500. Un préstamo de Bs 50 000 se amortiza en pagos mensuales durante 5 años con una tasa de interés del 6% anual compuesta mensualmente, ¿cuánto es la cuota mensual?

a) Aproximadamente Bs 867 b) Aproximadamente Bs 1067
c) Aproximadamente Bs 967 d) Ninguno

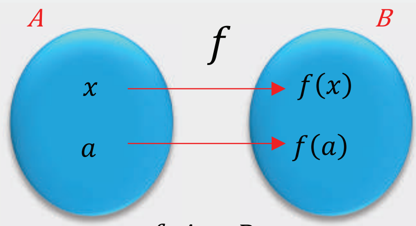
Respuesta: .....

CÁLCULO

1

Función

Es una relación entre dos conjuntos A y B, donde a cada elemento del primer conjunto A (domino) le corresponde un único elementó en el conjunto B (codominio).



$$f: A \to B$$
$$x \to y = f(x)$$

2

Límite

El límite de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a un valor a es el valor que alcanza cuando x se acerca al valor a.

$\lim_{x \to a} f(x) = L;\ L$ es el límite

Propiedades:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$$

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L_1}{L_2}$$

3

Derivada

La derivada de una función f en punto a mide la tasa de cambio instantánea de la función en ese punto. Es el límite de la razón del cambio de $f(a)$ con respecto al cambio de a cuando este cambio tiende a cero.

La derivada de f en un punto a se define:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se cumple: $c' = 0$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

4

Integral

Es una herramienta que permite calcular áreas, volúmenes, desplazamientos y otras cantidades acumulativas. Existen dos tipos de integrales, la integral definida y la integral indefinida.

La integral indefinida:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

La integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Usos y aplicaciones en la vida cotidiana

Una función que predice los precios en la agricultura puede ayudar a los agricultores a planificar sus cosechas y decidir cuándo vender su producto para obtener el mejor precio posible. Además esta información puede ser útil para los comerciantes.

Fuente: COMPAS Bolivia

Fuente: CADECOCRUZ

En ingeniería y arquitectura los límites se utilizan para diseñar estructuras y edificaciones que sean seguras, estables bajo diferentes condiciones de carga, movimiento de suelo u otro aspecto que se pueda presentar.

En Cochabamba las empresas de generación eléctrica pueden utilizar derivadas para optimizar la eficiencia de sus plantas maximizando la producción de energía mientras minimizan los costos operativos y el impacto ambiental para la sociedad.

Fuente: Libre EMPRESA

Fuente: EPSAS

Utilizando integrales se puede calcular el volumen total de agua almacenada en una represa en función de la profundidad y la forma del embalse. Esta información es crucial para la gestión de recursos hídricos.

Funciones

1501. Sea la función $f(x) = 5x^2 - x + 2$. Determinar $f(-3)$ y $f(3)$

Resolución

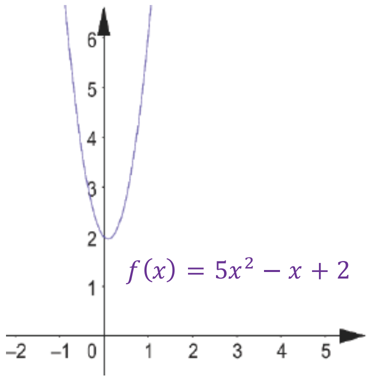
Evaluemos $x = -3$ en $f(x) = 5x^2 - x + 2$

$\Longrightarrow f(-3) = 5(-3)^2 - (-3) + 2$
$\Longrightarrow f(-3) = 5 \cdot 9 + 3 + 2$
$\Longrightarrow f(-3) = 45 + 3 + 2$
$\Longrightarrow f(-3) = 50$

Evaluemos $x = 3$ en $f(x) = 5x^2 - x + 2$

$\Longrightarrow f(3) = 5(3)^2 - 3 + 2$
$\Longrightarrow f(3) = 5 \cdot 9 - 3 + 2$
$\Longrightarrow f(3) = 45 - 3 + 2$
$\Longrightarrow f(3) = 44$

Gráficamente:



Respuesta

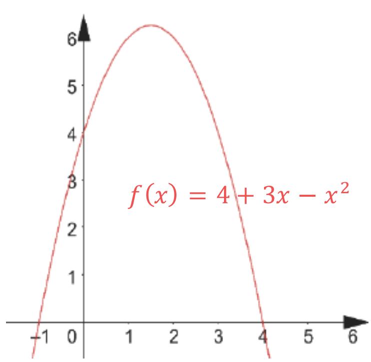
Así: $f(-3) = 50$ y $f(3) = 44$

1502. Sea la función: $f(x) = 4 + 3x - x^2$. Hallar el valor de:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

Resolución

Gráficamente:



Evaluar $x = 3 + h$ en $f(x) = 4 + 3x - x^2$

$\Longrightarrow f(3+h) = 4 + 3(3+h) - (3+h)^2$
$= 4 + 9 + 3h - 9 - 6h - h^2$
$= 4 - 3h - h^2$

Evaluar $x = 3$ en $f(x) = 4 + 3x - x^2$

$\Longrightarrow f(3) = 4 + 3(3) - 3^2$
$\Longrightarrow f(3) = 4$

Reemplazando:

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{4-3h-h^2-4}{h}=\frac{h(-3-h)}{h}=-3-h$$

Respuesta

El valor de $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ es: $-3-h$

1503. Hallar el dominio de la función: $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-9}$

Resolución

El dominio de una función es el conjunto de valores para los cuales está bien definida.

Para $\dfrac{x+4}{x^2-9}$ existe una restricción pues x^2-9 no puede ser cero, en tal caso no estaría definido, es decir:

$$x^2-9\neq 0 \Longrightarrow x\neq \pm 3$$

$$\Longrightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(-3{,}3)\cup(3,+\infty)$$

Respuesta

El dominio de la función es: $Dom\ f=\{x\in\mathbb{R}, x\neq\pm 3\}$

1504. Determinar el dominio de la función: $f(t)=\sqrt{2t-4}$

Resolución

Para $\sqrt{2t-4}$ existe una restricción pues $2t-4$ tiene que ser mayor o igual a cero, en tal caso no estaría definido, es decir:

$$2t-4\geq 0 \Longrightarrow 2t\geq 4$$

$$\Longrightarrow t\geq 2$$

$$\Longrightarrow t\in[2,+\infty)$$

Respuesta

El dominio de la función es: $Dom\ f=\{t\in\mathbb{R}, t\geq 2\}$

1505. Una función está dada por: $f(x)=\begin{cases}3-x, & x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

hallar $f(-1)$, $f(3)$ y el dominio de $f(x)$.

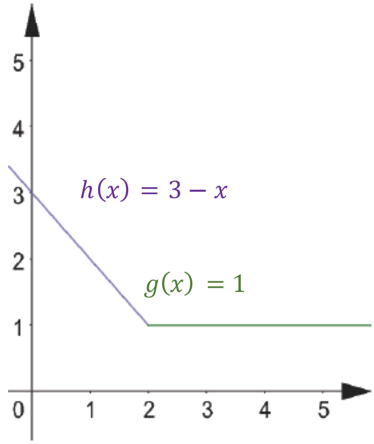
Resolución

Sea $h(x)=3-x$ para $x\le 2$
Sea $g(x)=1$ para $x>2$

Evaluando en $x=-1$ en $h(x)$:

$$h(x)=3-x$$

$$\Rightarrow h(-1)=3-(-1)$$
$$\Rightarrow h(-1)=4$$



La función $h(x)=3-x$ no tiene ninguna restricción, por tanto el dominio son todos los reales.

Evaluando en $x=3$ en $g(x)$:

$$g(x)=1\Rightarrow g(3)=1$$

La función $g(x)=1$ no tiene ninguna restricción, por tanto el dominio son todos los reales.

Respuesta

Así $f(-1)=4$ y $f(3)=1$, además, el dominio de la funcion es $Dom\,f=\{x\in\mathbb{R}\}$.

1506. Si $f(x)=7+\sqrt{5-x}$ y $g(u)=7+\sqrt{5-u}$, ¿será verdad que $f(x)=g(u)$?

Resolución

La función $f(x)$ tiene una restricción pues $5-x\ge 0$ es decir $5\ge x$, por tanto su dominio es la semirrecta $(-\infty, 5]$
La función $g(u)$ tiene una restricción pues $5-u\ge 0$ es decir $5\ge u$, por tanto su dominio es la semirrecta $(-\infty, 5]$

La función $f(x)=7+\sqrt{5-x}$ y la función $g(u)=7+\sqrt{5-u}$ tienen la misma estructura y ambas están bien definidas en $(-\infty, 5]$, por tanto tendrán la misma imagen.

Respuesta

Es verdad que $f(x) = g(u)$, pues tienen las mismas imágenes.

1507. Exprese los pares ordenados como una función:

$$(1,3), (a,5), (a,7b), (x,y^2)$$

Resolución

Una función se puede expresar de la siguiente manera:

$$y = f(x) \Leftrightarrow (x,y)$$

Ya que es una representación de pares ordenados en la recta real $\mathbb{R}$.

$$(1,3) \Longrightarrow f(1) = 3$$

$$(a,5) \Longrightarrow f(a) = 5$$

$$(a,7b) \Longrightarrow f(a) = 7b$$

$$(x,y^2) \Longrightarrow f(x) = y^2$$

Respuesta

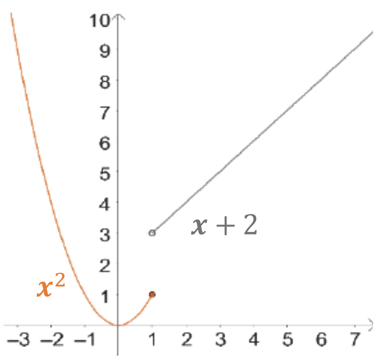
Las funciones son: $f(1) = 3, \quad f(a) = 5, \quad f(a) = 7b, \quad f(x) = y^2$

Límites

1508. Mediante la gráfica que se da, determinar los valores de:

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

Resolución



Cuando x tiende a 1 por la izquierda

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

Cuando x tiende a 1 por la derecha

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

Cuando x tiende a 1, no existe límite pues los valores de los límites laterales son distintos.

Respuesta

Los valores a los incisos *a, b,* y *c* son 1, 3, no existe.

1509. Mediante la definición de límite, demostrar: $\lim_{x \to 4}(2x-5)=3$

Resolución

Por la definición para la existencia de un límite, debe cumplir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tal que:} \quad |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

Ahora:

$$\lim_{x \to 4}(2x-5)=3$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \ |x-4| < \delta \Longrightarrow |2x-5-3| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \ |x-4| < \delta \Longrightarrow |2x-8| < \varepsilon$$

El objetivo en demostrar la existencia de un límite por definición es encontrar un δ que esté en función de ε.
Es bueno ver antes a qué se quiere llegar.

$$|2x-8| < \varepsilon \Longrightarrow 2|x-4| < \varepsilon$$

Como es cierto que:

$$|x-4| < \delta \Longrightarrow 2|x-4| < 2\delta = \varepsilon$$
$$\Longrightarrow 2\delta = \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Respuesta

La relación $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ demuestra que: $\lim_{x \to 4}(2x-5)=3$

1510. Por la definición de límite, demostrar: $\lim_{x \to 2}(x^2-4)=0$

Resolución

Sea:

$$\lim_{x \to 2}(x^2-4)=0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \ |x-2| < \delta \Longrightarrow |x^2-4-0| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \ |x-2| < \delta \Longrightarrow |x^2-4| < \varepsilon$$

Si:

$$|x^2-4| < \varepsilon \Longrightarrow |(x-2)(x+2)| < \varepsilon$$
$$\Longrightarrow |x-2||x+2| < \varepsilon$$

El objetivo es formar $|x-2|$ pues ya se tiene $|x+2|$

Como es cierto que:

$$|x-2|<\delta \qquad (1)$$

Tomemos un delta particular, sea $\delta_1 = 1$ entonces

$$|x-2|<\delta_1 \Rightarrow |x-2|<1$$
$$\Rightarrow -1<x-2<1 \quad //+4$$
$$\Rightarrow 3<x+2<5$$
$$\Rightarrow -5<3<x+2<5$$
$$\Rightarrow -5<x+2<5 \qquad \text{transitividad}$$
$$\Rightarrow |x+2|<5 \qquad (2)$$

Dato Importante

Cuando se despeja δ para determinar al ε, no debe haber variables, tiene que estar solo con constantes.

Multiplicando (1) y (2)

$$|x-2|<\delta,\ |x+2|<5 \Rightarrow |x-2||x+2|<5\delta=\varepsilon$$
$$\Rightarrow \delta=\frac{\varepsilon}{5}$$
$$\Rightarrow \delta_2=\frac{\varepsilon}{5}$$

Respuesta

Así, $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}=\left\{1,\frac{\varepsilon}{5}\right\}$, demuestra que $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$.

1511. Encontrar el valor del límite: $\lim\limits_{x\to 5} x^2-2x+1$

Resolución

Evaluar $x=5$ en la función del límite, ya que no existe ninguna restricción.

$$\lim_{x\to 5} x^2-2x+1=(5)^2-2(5)+1=25-10+1=16$$

Respuesta

Así el $\lim\limits_{x\to 5} x^2-2x+1$ es 16.

1512. Hallar el valor del límite:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}$$

Resolución

Desarrollar la función antes de tratar de evaluar el límite, es decir:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x}{x+3}$$

Ya se levantó la indeterminación del límite, ahora es conveniente determinar el límite, es decir:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x}{x+3}=\frac{3}{3+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Respuesta

El límite es: $\frac{1}{2}$

1513. Cuál es el valor del límite:

$$\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}$$

Resolución

Si evaluamos directamente el límite, no estaría definido, por tanto, hay que desarrollar la función del límite.

$$\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{x}}{\sqrt{5}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-(\sqrt{x})^2}=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x}\right)}{5-x}=\lim_{x\to 5}\sqrt{5}+\sqrt{x}$$

$$=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

Respuesta

Así: $\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}=2\sqrt{5}$

Básico 01

1514. Determinar los límites laterales derecho e izquierdo, de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1; x < 1 \\ 2x - 1; x \geq 1 \end{cases}$$

cuando x tiende a 1.

Resolución

Hay que hacer dos análisis, cuando x tiende por la izquierda y luego por la derecha es decir:

Cuando x tiende a 1 por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Cuando x tiende a 1 por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} (2x - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Respuesta

El límite lateral izquierdo es 2 y el límite lateral derecho es 1.

Continuidad

1515. Usando la definición de continuidad, determinar si la siguiente función es continua:

$$f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}\,; a = 4$$

Resolución

Una función f es continua en un número a si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Evaluar $\lim_{x \to a} f(x)$ tal que:

$$\lim_{x \to a} f(x) \Longrightarrow \lim_{x \to 4}\left(x^2 + \sqrt{7 - x}\right) = 4^2 + \sqrt{7 - 4} = 16 + \sqrt{3} \qquad (1)$$

Evaluar $f(x)$ en $x = 4$ tal que:

$$f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x} \Longrightarrow f(4) = 4 + \sqrt{7 - 4} = 16 + \sqrt{3} \qquad (2)$$

Se observa que (1) y (2) son iguales, es decir:

$$\lim_{x \to 4}\left(x^2 + \sqrt{7 - x}\right) = f(4)$$

Por tanto por la definición de continuidad, $f(x)$ es continua en $a = 4$.

Respuesta

Así $f(x)$ es continua en $a = 4$.

1516. ¿Por qué la siguiente función no es continua?

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & ; x \leq -1 \\ 2^x & ; x > -1 \end{cases}$$

Resolución

Para que la función se continua, debe existir el límite da la función en un punto. Si existe el límite de la función en un punto, entonces los límites laterales deberían ser iguales. Por tanto, evaluemos los límites laterales en la función $f(x)$ cuando tiende a -1.

Cuando x tiende a -1 por la derecha, es decir $x \leq -1$ tal que:

$$\lim_{x \to -1^-} (x+3) = -1 + 3 = 2$$

Cuando x tiende a -1 por la izquierda, es decir $x > -1$ tal que:

$$\lim_{x \to -1^+} 2^x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Notemos:

$$\lim_{x \to -1^+} 2^x \neq \lim_{x \to -1^-} (x+3)$$

Por tanto $f(x)$ no es una función continua.

Respuesta

Ya que los límites laterales no son iguales, $f(x)$ no es una función continua.

1517. ¿Por qué la siguiente función es discontinua?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & ; x \neq 3 \\ 6 & ; x = 3 \end{cases}$$

Resolución

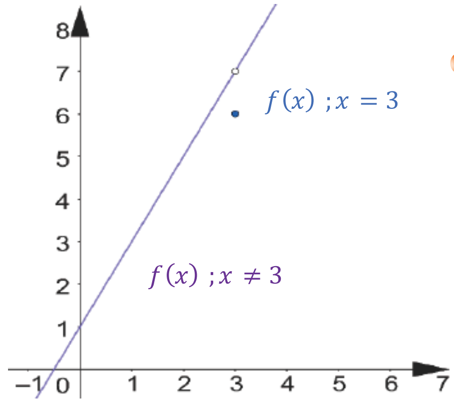
Una función f es continua en un número a si: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Evaluar $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ es decir:

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(-2x-1)(-x+3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3} -\frac{(-2x-1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} -(-2x-1) = \lim_{x\to 3}(2x+1)$$

$$= 2\cdot 3 + 1 = 7$$



Ahora evaluar $f(x)$ en $x = 3$ tal que:

$$f(3) = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{x-3} \neq f(3)$$

Entonces $f(x)$ no es una función continua.

Respuesta
Como no cumple la definición de continuidad, por tanto $f(x)$ es una función discontinua.

1518. Determinar si la función dada por:

$$f(x) = 1 - \sqrt{1-x^8}$$

es continua en el intervalo [-1,1].

Resolución

Una función es continua en un intervalo si es continua en cada número del intervalo.
Sea a tal que: $-1 < a < 1$
Observemos si se cumple que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Sea:

$$\lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} 1 - \sqrt{1-x^8} = 1 - \sqrt{1-a^8}$$

Sea:

$$f(x) = 1 - \sqrt{1-x^8} \Rightarrow f(a) = 1 - \sqrt{1-a^8}$$

Así se cumple que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Como es un intervalo cerrado [-1,1], tiene que ser continua en cada punto, entonces analicemos el límite en los extremos para ver si es continua en cada punto del intervalo cerrado [-1,1].

Para $a = -1$

$$\lim_{x\to -1} 1-\sqrt{1-x^8} = 1-\sqrt{1-(-1)^8} = 1-\sqrt{1-1^8} = f(-1) = 1$$

Para $a = 1$

$$\lim_{x\to 1} 1-\sqrt{1-x^8} = 1-\sqrt{1-1^8} = f(1) = 1$$

Así la función $f(x)$ es continua en cada punto del intervalo [-1,1].

Respuesta

La función f es continua.

1519. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2+2x & ; x \le 2 \\ x^3 - cx & ; x > 2 \end{cases}$$

Para qué valores, de la constante c, la función $f(x)$ será continua en (-∞,+∞).

Resolución

Si se quiere que la función $f(x)$ sea continua, los límites laterales tienen que ser iguales, cuando tienden a 2 por la izquierda y por la derecha, es decir:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Longrightarrow \lim_{x\to 2^-} cx^2+2x = \lim_{x\to 2^+} x^3 - cx$$

$$\Longrightarrow c\cdot 2^2 + 2\cdot 2 = 2^3 - c\cdot 2$$

$$\Longrightarrow 4c + 4 = 8 - 2c$$

$$\Longrightarrow 6c = 4$$

$$\Longrightarrow c = \frac{2}{3}$$

Respuesta

Para el valor de $c = \frac{2}{3}$ sera continua la función $f(x)$.

Básico 01

1520. Se sabe que las funciones f y g son funciones continuas, además se sabe que $g(2)=6$ y $\lim_{x\to 2}[3f(x)+f(x)g(x)]=36$, ¿cuánto vale $f(2)$?

Resolución

Usando las propiedades de límites se tendrá:

$$\lim_{x\to 2}[3f(x)+f(x)g(x)]=36 \Longrightarrow \lim_{x\to 2}3f(x)+\lim_{x\to 2}f(x)g(x)=36$$

$$\Longrightarrow 3\lim_{x\to 2}f(x)+\lim_{x\to 2}f(x)\lim_{x\to 2}g(x)=36$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 2}f(x)\left[3+\lim_{x\to 2}g(x)\right]=36 \qquad (1)$$

Si f y g son funciones continuas entonces se cumple que:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a) \text{ y } \lim_{x\to a}g(x)=g(a)$$

Para $a=2$ se tendrá:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2) \text{ y } \lim_{x\to 2}g(x)=g(2)=6 \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se tendrá:

$$\lim_{x\to 2}f(x)\left[3+\lim_{x\to 2}g(x)\right]=36 \Longrightarrow f(2)[3+g(2)]=36$$

$$\Longrightarrow f(2)[3+6]=36$$

$$\Longrightarrow f(2)\cdot 9=36$$

$$\Longrightarrow f(2)=4$$

Respuesta

Así $f(2)$ vale 4.

1521. Mediante el Teorema del Valor Intermedio demostrar que la función dada, tiene una raíz en el intervalo (-2,2):

$$f(x) = x^3 - x$$

Resolución

T.V.I. Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número c en (a,b) tal que $f(c) = N$.

Evaluando $f(x)$ en $x = -2$

$$f(x) = x^3 - x \Longrightarrow f(-2) = (-2)^3 - (-2) = -8 + 2 = -6$$

Evaluando $f(x)$ en $x = 2$

$$f(x) = x^3 - x \Longrightarrow f(2) = (2)^3 - 2 = 6$$

Si $f(-2) \neq f(2)$, $f(x)$ es continua en [-2,2] y $f(-2) < 0 < f(2)$, por el teorema del valor intermedio, existe un c en [-2,2] tal que $f(c) = 0$.

Lo cual nos garantiza que existe una raíz en el intervalo [-2,2].

Respuesta

En la función $f(x)$, existe una raíz en el intervalo [-2,2].

La derivada

1522. Hallar la derivada de la función $f(x)$, usando la definición de límite.

$$f(x) = 3x - 8$$

Resolución

La derivada de una función, por la definición de límite es:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sea:

$$f(x) = 3x - 8 \Longrightarrow f(x+h) = 3(x+h) - 8$$

Si:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Longrightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h) - 8 - (3x - 8)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x + 3h - 8 - 3x + 8}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3$$

Respuesta

Así la derivada de $f(x)$ es: $f'(x) = 3$

1523. A través de la definición de límite, hallar la derivada de la función:

$$y = \sqrt{9+x}$$

Resolución

Para

$$f(x) = y = \sqrt{9+x} \Longrightarrow f(x+h) = \sqrt{9+(x+h)}$$

Si:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Longrightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+x+h}-\sqrt{9+x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+x+h}-\sqrt{9+x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{9+x+h}+\sqrt{9+x}}{\sqrt{9+x+h}+\sqrt{9+x}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{9+x+h}\right)^2-\left(\sqrt{9+x}\right)^2}{h\left(\sqrt{9+x+h}+\sqrt{9+x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{9+x+h-(9+x)}{h\left(\sqrt{9+x+h}+\sqrt{9+x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{9+x+h-9-x}{h\left(\sqrt{9+x+h}+\sqrt{9+x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{9+x+h}+\sqrt{9+x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{9+x+h}+\sqrt{9+x}} = \frac{1}{\sqrt{9+x+0}+\sqrt{9+x}} = \frac{1}{2\sqrt{9+x}}$$

Respuesta

La derivada de la función y es: $y' = \frac{1}{2\sqrt{9+x}}$

1524. Usando la definición de límite, encontrar la derivada de la función dada por:
$$f(x)=\frac{x^2-1}{2x-3}$$

Resolución

Sea:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{2x-3}\Rightarrow f(x+h)=\frac{(x+h)^2-1}{2(x+h)-3}=\frac{x^2+2xh+h^2-1}{2x+2h-3}$$

Si:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x^2+2xh+h^2-1}{2x+2h-3}-\dfrac{x^2-1}{2x-3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(2x-3)(x^2+2xh+h^2-1)-(x^2-1)(2x+2h-3)}{(2x+2h-3)(2x-3)}}{h}$$

OperacionAuxilair:

$$\bullet\ (2x-3)(x^2+2xh+h^2-1)$$
$$=2x^3+4x^2h+2xh^2-2x-3x^2-6xh-3h^2+3 \qquad (1)$$

$$\bullet\ (x^2-1)(2x+2h-3)$$
$$=2x^3+2x^2h-3x^2-2x-2h+3 \qquad (2)$$

Restando (1) y (2)

$$(2x-3)(x^2+2xh+h^2-1)-(x^2-1)(2x+2h-3)$$
$$=2x^2h+2xh^2-6xh-3h^2+2h$$

Retomando el ejercicio:

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2x^2h+2xh^2-6xh-3h^2+2h}{(2x+2h-3)(2x-3)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x^2+2xh-6x-3h+2)}{h(2x+2h-3)(2x-3)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x^2+2xh-6x-3h+2}{(2x+2h-3)(2x-3)}=\frac{2x^2+2x\cdot 0-6x-3\cdot 0+2}{(2x+2\cdot 0-3)(2x-3)}$$

$$=\frac{2x^2-6x+2}{(2x-3)^2}$$

Saber más...

Se puede hallar la segunda derivada y'', aplicando la definición de límite en la primera derivada y'.

Respuesta

Por tanto le derivada es: $y=\frac{2x^2-6x+2}{(2x-3)^2}$

1525. Derivar la función dada por: $y = 4x^5 - 3x^2 + 5x$

Resolución

Por la regla de la potencia, sea n un entero positivo, entonces:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Sea:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y) &= (4x^5 - 3x^2 + 5x)' = 4(x^5)' - 3(x^2)' + 5(x)' \\ &= 4 \cdot 5x^{5-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + 5 \cdot 1x^{1-1} = 20x^4 - 6x^1 + 5x^0 \\ &= \quad 20x^4 - 6x + 5\end{aligned}$$

Respuesta

Por tanto, la derivada y es: $y' = 20x^4 - 6x + 5$

1526. Obtener la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Resolución

Si:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1} = x^{-\frac{2}{3}}$$

Sea:

$$\frac{df}{dx}(x) = \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

Respuesta

Así, la deriva de la función $f(x)$ es: $f'(x) = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

1527. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto $(1{,}3)$.

$$y = 2x^3 - x^2 + 2$$

Resolución

Notar que la pendiente m es la derivada de la función y, solo faltaría evaluarla en el punto x, es decir:

$$m = y' \Longrightarrow m = (2x^3 - x^2 + 2)'$$
$$= (2x^3)' - (x^2)' + 2' = 6x^2 - 2x + 0 = 6x^2 - 2x$$

Si el punto es $(1, 3)$ entonces evaluar en $x = 1$ en $y' = f'(x)$ es decir:

$$m = f'(x) = 6x^2 - 2x \Longrightarrow f'(1) = 6(1)^2 - 2(1) = 4$$
$$\Longrightarrow m = 4$$

Se tiene el punto $(1, 3)$, la pendiente $m = 4$ al reemplazar en la ecuación de la recta tangente:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Longrightarrow y - 3 = 4(x - 1)$$
$$\Longrightarrow y = 4x - 4 + 3 \Longrightarrow y = 4x - 1$$

Respuesta

Por tanto la ecuación de la recta tangente es: $y = 4x - 1$

1528. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 + 1$ que es paralela a la recta $32x - y = 15$.

Resolución

Analizar $32x - y = 15$, es decir:

$$32x - y = 15 \Longrightarrow 32x - 15 = y$$

Si la ecuación está dada por $y = mx + b$, donde m es la pendiente, entonces:

$$y = 32x - 15 \Longrightarrow m = 32 \qquad (1)$$

Derivando $y = x^4 + 1$, se tendrá:

$$y = x^4 + 1 \Longrightarrow y' = 4x^3 + 0 \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2) se tendrá:

$$m = y' \Longrightarrow 4x^3 = 32 \Longrightarrow x^3 = 8 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Longrightarrow x = 2$$

Evaluamos $x = 2$ en $y = x^4 + 1$, para encontrar la coordenada de los puntos, es decir:

$$f(x) = x^4 + 1 \Longrightarrow y = f(2) = (2)^4 + 1 = 17$$

Con el punto $(2, 17)$ y la pendiente $m = 32$, se tendrá:

Básico 01

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Longrightarrow y - 17 = 32(x - 2)$$

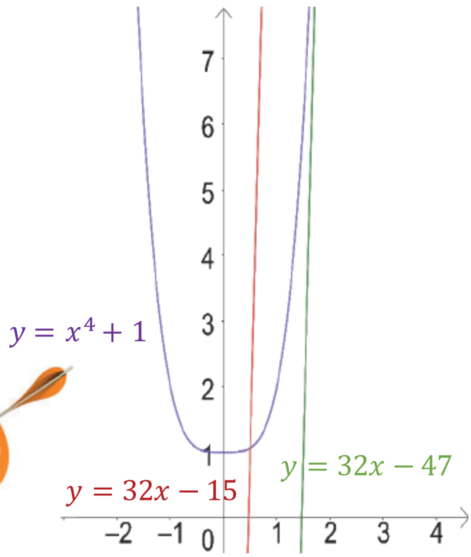
$$\Longrightarrow y - 17 = 32x - 64$$

$$\Longrightarrow y = 32x - 47$$

Respuesta

Así la ecuación de la recta tangente es:

$$y = 32x - 47$$



Aplicaciones de la derivada

1529. Hallar los valores máximos y mínimos absolutos de la función f, sobre el intervalo dado:

$$f(x) = 12 + 4x - x^2, \qquad [0, 5]$$

Resolución

Determinemos la derivada de la función, es decir:

$$f(x) = 12 + 4x - x^2 \Longrightarrow f(x)' = 0 + 4 - 2x = 4 - 2x$$

Determinemos los puntos críticos, es decir:

$$f(x)' = 0 \Longrightarrow 4 - 2x = 0 \Longrightarrow 4 = 2x \Longrightarrow 2 = x$$

Notar que solo existe un punto critico $x = 2$ en el intervalo, [0,5] y además el punto crítico pertenece al intervalo.

Ahora evaluemos en la función $f(x)$:
Evaluando $x = 2$ en $f(x) = 12 + 4x - x^2$

$$f(2) = 12 + 4(2) - 2^2 = 12 + 8 - 4 = 16$$

$$f(0) = 12 + 4(0) - 0^2 = 12 + 0 - 0 = 12$$

Evaluando $x = 5$ en $f(x) = 12 + 4x - x^2$

$$f(5) = 12 + 4(5) - 5^2 = 12 + 20 - 25 = 7$$

Notar que:

$$f(5) = 7, f(0) = 12, f(2) = 16$$

Por tanto, podemos decir que:
Tiene un mínimo absoluto en: $f(5) = 7$
Tiene un máximo absoluto en: $f(2) = 16$

Respuesta

Tiene un mínimo absoluto en 7 y un máximo absoluto en 16.

1530. Encontrar los valores máximos y mínimos absolutos de la función f, sobre el intervalo dado:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}, \qquad [0,3]$$

Determinemos la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1} \Rightarrow f(x)' = \frac{x' \cdot (x^2 - x + 1) - x(x^2 - x + 1)'}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot (x^2 - x + 1) - x(2x - 1 + 0)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{x^2 - x + 1 - 2x^2 + x}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Determinar los puntos críticos:

$$f(x)' = 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2} = 0 \Rightarrow (1 - x)(1 + x) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - x = 0 \text{ o } 1 + x = 0 \Rightarrow x = 1 \ \ o\ \ x = -1$$

Los puntos críticos son $x = 1$ y $x = -1$ en el intervalo, [0,3] y además solo el punto crítico $x = 1$ pertenece al intervalo.

Ahora evaluemos en la función $f(x)$:

Evaluar $x = 0$ en $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$

$$f(0) = \frac{0}{0^2 - 0 + 1} = 0$$

Básico 01

Evaluar $x = 1$ en $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

$$f(1) = \frac{1}{1^2 - 1 + 1} = 1$$

Evaluar $x = 3$ en $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

$$f(3) = \frac{3}{3^2 - 3 + 1} = \frac{3}{7}$$

Notar que:

$$f(3) = \frac{3}{7}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

Por tanto, podemos decir que:
Tiene un mínimo absoluto en: $f(0) = 0$
Tiene un máximo absoluto en: $f(1) = 1$

Respuesta
Así tiene un mínimo absoluto en 0 y un máximo absoluto en 1.

1531. Localizar los valores máximos y mínimos absolutos de la función f, en el intervalo dado: $f(x) = (x^2 - 1)^3, \qquad [-1, 2]$

Resolución

Determinemos la derivada de la función:

$$f(x) = (x^2 - 1)^3 \Longrightarrow f(x)' = 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 - 1)^2$$

Determinemos los puntos críticos:

$$f(x)' = 0 \Longrightarrow 6x(x^2 - 1)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \ \text{ o } \ 1 + x = 0 \Longrightarrow x = 0 \ \text{ o } \ x = -1$$

Los puntos críticos son $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$ están en el intervalo, [-1, 2].
Evaluemos en la función $f(x)$:
Evaluando $x = -1$ en $f(x) = (x^2 - 1)^3$

$$f(-1) = \left((-1)^2 - 1\right)^3 = (1 - 1)^3 = 0$$

Evaluando $x = 0$ en $f(x) = (x^2 - 1)^3$

$$f(0) = (0^2 - 1)^3 = -1$$

Evaluando $x = 1$ en $f(x) = (x^2 - 1)^3$

$$f(1) = (1^2 - 1)^3 = 0$$

Evaluando $x = 2$ en $f(x) = (x^2 - 1)^3$

$$f(2) = (2^2 - 1)^3 = (3)^3 = 27$$

Por tanto:
Tiene un mínimo absoluto en: $f(0) = -1$
Tiene un máximo absoluto en: $f(2) = 27$

Respuesta

Existe un mínimo absoluto en -1 y un máximo absoluto en 27.

1532. Compruebe que la función dada, satisface el teorema de Rolle.

$$f(x) = 5 - 12x + 3x^2, \qquad [1, 3]$$

Resolución

Teorema de Rolle. Si f es una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$

Al ver que $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$ es una función continua en [1,3], además $f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b) verificar si $f(a) = f(b)$, es decir:

Sea $x = 1$ evaluar en $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$ tal que:

$$f(1) = 5 - 12(1) + 3(1)^2 = -4$$

Sea $x = 3$ evaluar en $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$ tal que:

$$f(3) = 5 - 12(3) + 3(3)^2 = -4$$

Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un número c en (a, b) tal que:

$$f'(c) = 0 \Longrightarrow -12 + 6c = 0 \Longrightarrow 6c = 12 \Longrightarrow c = 2$$

Respuesta

Así existe un c en el intervalo abierto (a, b) tal que si $c = 2$ cumple con el teorema de Rolle.

1533. Comprobar que la función dada por:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

en el intervalo [0,2], satisface la hipótesis del teorema del valor intermedio.

Básico 01

Resolución

Teorema del valor intermedio, si f es una función que satisface las hipótesis:

f es continua sobre el intervalo cerrado $[a,b]$
f es derivable sobre el intervalo abierto (a,b)

Entonces existe un número c en (a,b) tal que:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Se sabe que f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y es derivable sobre el intervalo abierto (a,b), hallar el valor c.

Sea $x=0$ evaluar en $f(x)=2x^2-3x+1$ tal que:

$$f(0)=2(0)^2-3(0)+1=1$$

Sea $x=2$ evaluar en $f(x)=2x^2-3x+1$ tal que:

$$f(2)=2(2)^2-3(2)+1=3$$

Sea $x=c$ evaluar en $f(x)=2x^2-3x+1$ tal que:

$$f(c)=2c^2-3c+1 \Longrightarrow f'(c)=4c-3$$

Si:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Longrightarrow 4c-3=\frac{3-1}{2-0}=1$$

$$\Longrightarrow 4c=1+3=4 \Longrightarrow c=1$$

Respuesta

Así, existe un $c=1$ en el intervalo [0,2].

1534. Sea la función:

$$f(x)=2x^3+3x^2-36x$$

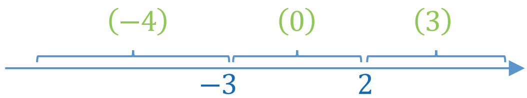
a) Encuentre los intervalos donde f es creciente o decreciente.
b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f.
c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

Resolución

a) Para los intervalos de crecimiento se necesita la primera deriva:

$$f'(x)=0 \Longrightarrow 6x^2+6x-36=0$$
$$\Longrightarrow x^2+x-6=0 \Longrightarrow (x+3)(x-2)=0$$
$$\Longrightarrow x+3=0 \quad o \quad x-2=0 \Longrightarrow x=-3 \quad o \quad x=2$$

Situando los valores de los puntos críticos en el eje x, se toma un punto en los intervalos de la siguiente manera:



Se evalúan los valores que se tomaron en la primera derivada.
Para $x = -4$ evaluamos en $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$:

$$f'(-4) = 6(-4)^2 + 6(-4) - 36 = 64 - 24 - 36$$

$$f'(-4) = 4 > 0$$

Como es mayor que cero, es creciente en el intervalo.
Para $x = 0$ evaluamos en $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$:

$$f'(0) = 6(0)^2 + 6(0) - 36 = -36$$

$$f'(0) = -36 < 0$$

Como es menor que cero, es decreciente en el intervalo.
Para $x = 3$ evaluamos en $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$:

$$f'(3) = 6(3)^2 + 6(3) - 36 = 54 + 18 - 36 = 36$$

$$f'(3) > 0$$

Como es mayor que cero, es creciente en el intervalo.
Por tanto, en los intervalos [-∞,-3] y [2,+∞] la función es creciente y en el intervalo [-3,2] es decreciente.

b) Ya que no se tiene un intervalo, para los valores máximos y mínimos locales de f solo se evalúan los puntos críticos en la función f.

Para $x = -3$

$$f(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 36(-3)$$

$$= -54 + 27 + 108 = 81$$

Para $x = 2$

$$f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 36(2)$$

$$= 16 + 12 - 72 = -44$$

Por tanto, tiene un máximo local en $f(-3) = 81$ y un mínimo local en $f(2) = -44$.

c) Para la concavidad se necesita la segunda deriva y ver si es mayor o menor que cero.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 \Longrightarrow f''(x) = 0$$

$$\Longrightarrow 12x + 6 = 0 \Longrightarrow 12x = -6 \Longrightarrow x = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} < 0$$

Por tanto en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ es cóncava hacia arriba y en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ es cóncava hacia abajo.

Tendrá un punto de inflexión en $x = -\frac{1}{2}$ para $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$, es decir:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 36\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 18 = \frac{37}{2}$$

Respuesta

Así f es creciente en (-∞, -3) y (2,+∞), y decreciente en (-3, 2).

Tiene un máximo local en $f(-3) = 81$, un mínimo local en $f(2) = -44$.

Es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, cóncava hacia abajo en $\left(\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y tiene un punto de inflexión en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{37}{2}\right)$.

1535. Sea la función:

$$h(x) = (x+1)^5 - 5x - 2$$

a) Encuentre los intervalos donde f es creciente o decreciente.
b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f.
c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

Resolución

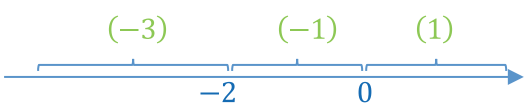
a)

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 5(x+1)^4 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 5(x+1)^4 = 5 \Rightarrow (x+1)^4 = 1 \Rightarrow x + 1 = \pm 1$$

$$\Rightarrow x = -1 - 1 \quad o \quad x = -1 + 1 \Rightarrow x = -2 \quad o \quad x = 0$$

Ahora



Para $x = -3$ evaluamos:

$$h'(-3) = 5(-3+1)^4 - 5 = 7$$

$$h'(-3) = 75 > 0$$

Como es mayor que cero, es creciente en el intervalo.

Para $x = -1$ evaluamos:

$$h'(-1) = 5(-1+1)^4 - 5 = -5$$

$$h'(-1) = -5 < 0$$

Como es menor que cero, es decreciente en ese intervalo.

Para $x = 1$ evaluamos:

$$h'(1) = 5(1+1)^4 - 5 = 75$$

$$h'(1) = 75 > 0$$

Como es mayor que cero, es creciente en el intervalo.

Por tanto en los intervalos (-∞,-2) y (0,+∞) es una función creciente y en el intervalo (-2,0) es decreciente.

b)

Para $x = -2$:

$$h(-2) = \left((-2)+1\right)^5 - 5(-2) - 2$$

$$= -1 + 10 - 2 = 7$$

Para $x = 0$:

$$h(0) = \left((0)+1\right)^5 - 5(0) - 2$$

$$= 1 - 0 - 2 = -1$$

La función h tiene un máximo (-2,7) y tiene un mínimo local en (2,-1).

c)

$$h'(x) = 5(x+1)^4 - 5 \Longrightarrow h''(x) = 0$$

$$\Longrightarrow 20(x+1)^3 - 0 = 0 \Longrightarrow x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$$

$$\Longrightarrow x = -1 < 0$$

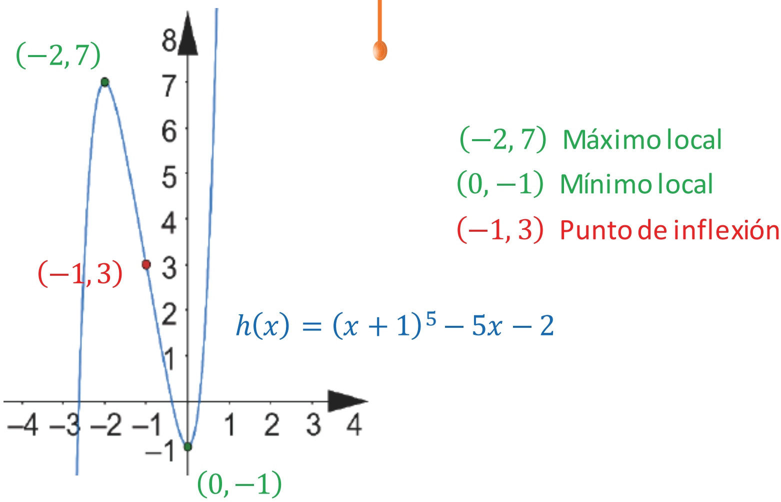
Luego en (-∞,-1) es cóncava hacia abajo y en (-1,+∞) es cóncava hacia arriba.

Tendrá un punto de inflexión en $x = -1$:

$$h(-1) = ((-1) + 1)^5 - 5(-1) - 2 = 0 + 5 - 2 = 3$$

$$h(-1) = 3$$

Gráficamente se interpretaría:



Respuesta

Es creciente en (-∞,-3) y (2,+∞), y decreciente en (-3,2).

Tiene un máximo local en $h(-2) = 7$, un mínimo local en $h(0) = -1$.

Es cóncava hacia arriba en]-1,+∞[, cóncava hacia abajo en (-∞,-1) y tiene un punto de inflexión en (-1,3).

La integral

1536. Calcule el área bajo la gráfica de $f(x)=1+x^2$ de $x=-1$ a $x=2$ con tres rectángulos de aproximación y puntos derechos.

Resolución

Sea $f(x)=1+x^2$, encontrar la distancia para las particiones, es decir:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}\Rightarrow \Delta x=\frac{2-(-1)}{3}$$

$$=\frac{2+1}{3}=\frac{3}{3}=1$$

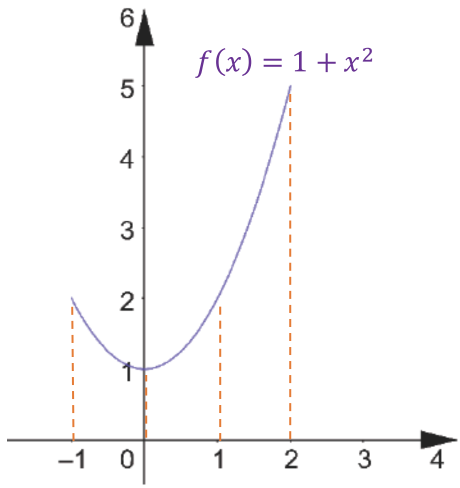
Sea:

$$R_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta x\cdot f(x_i)$$

$$\Rightarrow R_3=\sum_{i=1}^{3}\Delta x\cdot f(x_i)$$

$$=1\cdot f(0)+1\cdot f(1)+1.f(2)$$

Gráficamente



$$=1\cdot(1+(0)^2)+1\cdot(1+(1)^2)+1\cdot(1+(2)^2)=1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 5$$

$$=1+2+5=8$$

Respuesta

El área es 8.

1537. Examinar las sumas superiores e inferiores para $f(x)=2+\operatorname{sen}x$ donde $0\le x\le \pi$ con $n=4$.

Resolución

Para determinar la suma inferior se tiene:

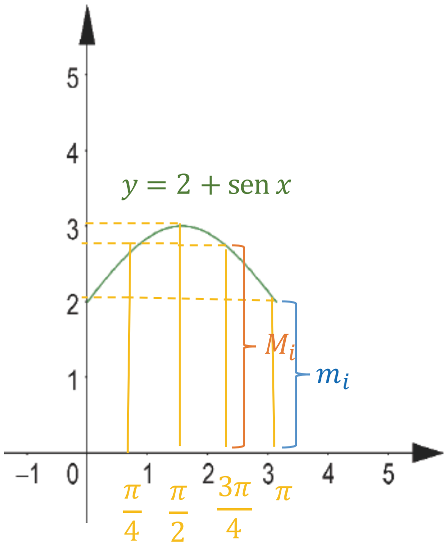
$$R_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta x\cdot m_i \text{ donde } m_i \text{ es la mínima distancia en el eje } y.$$

Básico 01

Para determinar la suma superior se tiene:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot M_i \quad \text{donde } M_i \text{ es la máxima distancia en el eje } y.$$

Gráficamente



Determinar la distancia para las particiones, es decir:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Longrightarrow \Delta x = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

La suma inferior está dada por:

$$R_n = \sum_{i=1}^{4} \Delta x \cdot m_i$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot f(0) + \frac{\pi}{4} \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} \cdot f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} \cdot f(\pi)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(f(0) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f(\pi)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left((2 + \text{sen}\, 0) + \left(2 + \text{sen}\frac{\pi}{4}\right) + \left(2 + \text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) + (2 + \text{sen}\, \pi)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left((2+0) + \left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + (2+0)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}(8 + \sqrt{2}) \approx 7{,}39$$

La suma superior está dada por:

$$R_n = \sum_{i=1}^{4} \Delta x \cdot M_i$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \cdot f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\left(2 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) + \left(2 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) + \left(2 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) + \left(2 + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + (2+1) + (2+1) + \left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(10 + \sqrt{2}\right) \approx 8{,}96$$

Respuesta

La suma inferior es, aproximadamente es 7,39 y la suma superior es aproximadamente, 8,96.

1538. Expresar el área bajo la gráfica de f como un límite, no evalúe el límite. (solo expresar)

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \qquad 1 \leq x \leq 3$$

Resolución

Sea:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Longrightarrow \Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

A partir de 1 tendrá un aumento de $\frac{2}{n}$ que se puede expresar para los x_i como:

$$x_i = 1 + i\Delta x = 1 + i\frac{2}{n} = 1 + \frac{2i}{n}$$

Se puede expresar el área como:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\cdot\frac{2x_i}{{x_i}^2+1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\cdot\frac{2\left(1+\frac{2i}{n}\right)}{\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\cdot\frac{2+\frac{4i}{n}}{1+\frac{4i}{n}+\frac{4i^2}{n^2}+1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\cdot\frac{\frac{2n+4i}{n}}{\frac{2n^2+4in+4i^2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\cdot\frac{n^2(2n+4i)}{n(2n^2+4in+4i^2)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\cdot\frac{n^2(2n+4i)}{2n(n^2+2in+i^2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2n+4i}{n^2+2in+i^2}$$

Respuesta

El área de la región expresado como límite es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4i}{n^2+2in+i^2}$$

1539. Determinar la integral mediante el límite de: $\int_2^5 (4-2x)\,dx$

Resolución

Determinar las particiones:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Longrightarrow \Delta x = \frac{5-2}{n} = \frac{3}{n}$$

A partir de 2 tendrá un aumento de $\frac{3}{n}$ que se puede expresar para los x_i como:

$$x_i = 2 + i\Delta x = 1 + i\frac{3}{n} = 2 + \frac{3i}{n}$$

Expresando la integral como el límite:

$$\int_2^5 (4-2x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x\cdot f(x_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x\cdot f\left(2+\frac{3i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\cdot\left(4-2\left(2+\frac{3i}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\cdot\left(4-4-\frac{6i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\cdot\left(-\frac{6i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} -\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty} -\frac{18}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{18}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = -9\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = -9\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= -9(1+0) = -9$$

Respuesta

El resultado de la integral es -9.

1540. Evaluar la integral definida por: $\int_1^3 (x^2+2x-4)\,dx$

Resolución

Por el segundo teorema fundamental del cálculo, si f es continua en $[a,b]$ entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Donde F es una antiderivada de f es decir: $F' = f$

Así:

$$\int_1^3 (x^2+2x-4)\,dx = \int_1^3 x^2dx + \int_1^3 2xdx - \int_1^3 4dx$$

$$= \int_1^3 x^2dx + 2\int_1^3 xdx - 4\int_1^3 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 + 2\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 - 4x\Big|_1^3$$

$$= \left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) + 2\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right) - 4(3-1)$$

$$= \left(\frac{26}{3}\right) + 8 - 8 = \frac{26}{3}$$

Respuesta

La integral es $\frac{26}{3}$.

1541. Determinar el valor de la integral dada por: $\int_1^2 \left(\frac{v^3+3v^6}{v^4}\right)dv$

Resolución

Notar que:

$$\frac{v^3+3v^6}{v^4}=\frac{v^3}{v^4}+\frac{3v^6}{v^4}=\frac{1}{v}+3v^2$$

Sea:

$$\int_1^2 \left(\frac{v^3+3v^6}{v^4}\right)dv=\int_1^2 \left(\frac{1}{v}+3v^2\right)dv=\int_1^2 \frac{1}{v}dv+\int_1^2 3v^2dv$$

$$=\int_1^2 \frac{1}{v}dv+3\int_1^2 v^2dv=\log v\Big|_1^2+3\frac{v^3}{3}\Big|_1^2$$

$$=(\log 2-\log 1)+(2^3-1^3)=\log 2+7$$

Respuesta

La integral es $\log 2+7$.

1542. Hallar el valor de la integral dada por: $\int_0^1 (x^e+e^x)dx$

Resolución

$$\int_0^1 (x^e+e^x)dx=\int_0^1 x^e dx+\int_0^1 e^x dx$$

$$=\frac{x^{e+1}}{e+1}\Big|_0^1+e^x\Big|_0^1=\frac{1}{e+1}(1^{e+1}-0^{e+1})+(e^1-e^0)$$

$$=\frac{1}{e+1}(1-0)+(e-1)=\frac{1}{e+1}+e-1=\frac{1+e^2+e-e-1}{e+1}$$

$$\int_0^1 (x^e+e^x)dx=\frac{e^2}{e+1}$$

Respuesta

El resultado es: $\frac{e^2}{e+1}$

1543. Determinar el valor de la integral dada por:

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx \text{ donde } f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ \cos x, & \frac{\pi}{2}\le x\le \pi\end{cases}$$

Resolución

Es una función por tramos, se hace un análisis a la integral:

$$\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$$

Así:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$$

$$=(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(\operatorname{sen} x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)+\left(\operatorname{sen}\pi-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=(-0+1)+(0-1)=0$$

Respuesta

La integral es 0.

1544. Encontrar la integral: $\int\left(5+\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{4}x^3\right)dx$

Resolución

Usar la definición de una integral no definida, es decir:

$$\int\left(5+\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{4}x^3\right)dx=\int 5dx+\int\frac{2}{3}x^2dx+\int\frac{3}{4}x^3dx$$

$$=5\int dx+\frac{2}{3}\int x^2dx+\frac{3}{4}\int x^3dx$$

$$=5x+C_1+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C_2+\frac{3}{4}\cdot\frac{x^4}{4}+C_3$$

$$=5x+\frac{2}{9}x^3+\frac{3}{16}x^4+C \quad \text{donde} \quad C=C_1+C_2+C_3$$

Respuesta

La integral indefinida es: $5x + \frac{2}{9}x^3 + \frac{3}{16}x^4 + C$

1545. Determinar la integral dada por: $\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x} dx$

Resolución

Sea:

$$\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^3}{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = \int \left(x^2 - 2x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$= \int x^2 dx - \int 2x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^3}{3} + C_1 - 2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C_2$$

$$= \frac{x^3}{3} + C_1 - 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_2 = \frac{x^3}{3} - 4x^{\frac{1}{2}} + C_1 + C_2$$

$$\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x} dx = \frac{1}{3}x^3 - 4\sqrt{x} + C$$

Respuesta

La integral indefinida es: $\frac{1}{3}x^3 - 4\sqrt{x} + C$

Aplicaciones de la integral

1546. Hallar el área sombreada bajo las regiones:

$$y = x \,;\, y = (x - 2)^2$$

Resolución

Se debe calcular el área de la región sombreada en la imagen, pero antes se necesita hallar los ejes de intersección con el eje x, para determinar los parámetros de la integral.

Para hallar las coordenada del eje x se tendrá:

$$\begin{cases} y = x \\ y = (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = (x-2)^2$$

$$\Rightarrow x = x^2 - 4x + 4$$

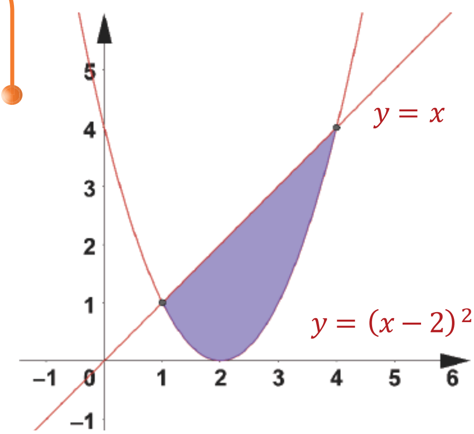
$$\Rightarrow 0 = x^2 - 5x + 4$$

$$\Rightarrow 0 = (x-1)(x-4)$$

$$\Rightarrow 0 = x - 1 \;\; o \;\; x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 1 = x \;\; o \;\; x = 4$$

Gráficamente



Por tanto, se debe calcular en la integral de 1 hasta 4, es decir:

$$A = \int_1^4 (x - (x-2)^2)\,dx = \int_1^4 \left(x - (x^2 - 4x + 4)\right) dx$$

$$= \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right)\Bigg|_1^4$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{5\cdot 4^2}{2} - 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{5\cdot 1^2}{2} - 4\cdot 1\right)$$

$$= \left(-\frac{64}{3} + 40 - 16\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) = \frac{8}{3} + \frac{11}{6} = \frac{9}{2}$$

Respuesta

El área bajo la región sombreada es $\frac{9}{2}$.

1547. Calcular el área delimitada entre las curvas:

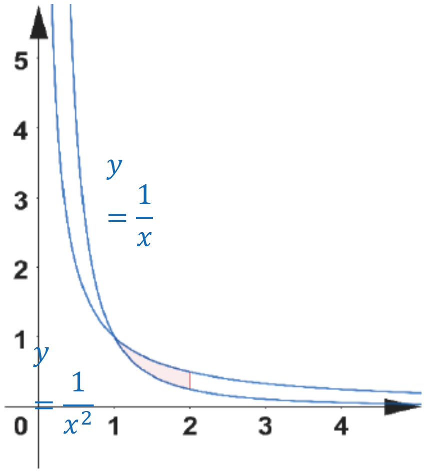
$$y = \frac{1}{x}, \qquad y = \frac{1}{x^2}$$

en el intervalo de $(1,2)$

Resolución

Como se tiene el intervalo respecto al eje x , hay que evaluarla en la integral definida por:

Gráficamente:



$$A = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

$$= (\ln x)\Big|_1^2 - \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2$$

$$= (\ln 2 - \ln 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right)$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}$$

Respuesta

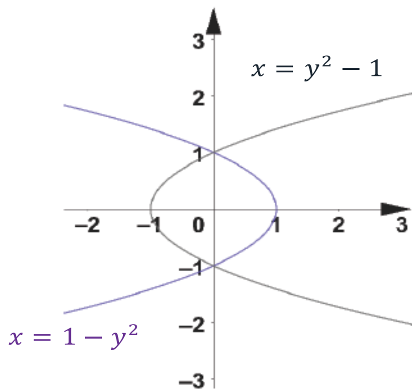
Así el área sombreada vale: $\ln 2 - \frac{1}{2}$

1548. Determinar la superficie encerrada entre las funciones:

$$x = 1 - y^2, \qquad x = y^2 - 1$$

Resolución

Gráficamente:



Esta vez se tomará el intervalo en el eje y, es decir:

$$\begin{cases} x = 1 - y^2 \\ x = y^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 1 - y^2 = y^2 - 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 1 = y^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad 2 = 2y^2 \Rightarrow 1 = y^2$$

$$\Rightarrow \quad \pm\sqrt{1} = y$$

El intervalo en el eje y será de -1 hasta 1. Evaluando en la integral se tendrá:

$$A = \int_{-1}^{1} (1 - y^2) - (y^2 - 1)\, dy = \int_{-1}^{1} (1 - y^2) - (1 - y^2)\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} 2(1-y^2)\,dy = 2\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy = 2\cdot 2\int_{0}^{1}(1-y^2)\,dy$$

$$= 4\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 4\left[\left(1-\frac{1^3}{3}\right)-\left(0-\frac{0^3}{3}\right)\right] = 4\left(1-\frac{1^3}{3}\right)$$

$$= 4\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

Respuesta

La región entre las funciones tiene un área de $\frac{8}{3}$.

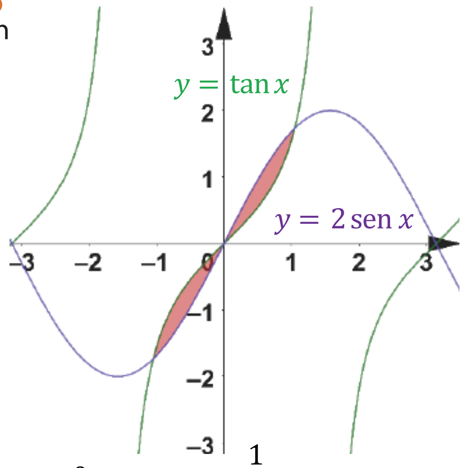
1549. Determinemos el área entre las funciones:

$$y = \tan x\,, \qquad y = 2\,\mathrm{sen}\,x$$

Resolución

Encontremos los puntos de intersección respecto al eje x, tal que:

Gráficamente:



$$y = y \Longrightarrow \tan x = 2\,\mathrm{sen}\,x$$

$$\Longrightarrow \tan x = 2\,\mathrm{sen}\,x$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} = 2\,\mathrm{sen}\,x$$

$$\Longrightarrow \mathrm{sen}\,x = 2\,\mathrm{sen}\,x\;\cos x$$

$$\Longrightarrow 0 = 2\,\mathrm{sen}\,x\;\cos x - \mathrm{sen}\,x$$

$$\Longrightarrow 0 = \mathrm{sen}\,x\,(2\;\cos x - 1) \Longrightarrow \mathrm{sen}\,x = 0 \quad \text{o} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = \pm\frac{\pi}{3}$$

Por la gráfica, se ve que es una reflexión a partir del punto cero, entonces bastaría evaluarla en $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ o $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$, luego:

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\,\mathrm{sen}\,x - \tan x)\;dx = 2[-2\cos x - \ln(\sec x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2[(-1-\ln 2)-(2-0)] = 2(1-\ln 2) = 2 - 2\ln 2$$

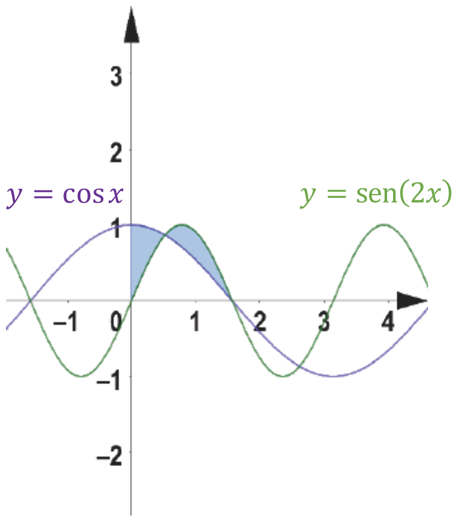
Respuesta

Así el área de la región sombreada es: $2 - 2\ln 2$

1550. Obtener el área de la región comprendida entre las funciones para x en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$: $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen}(2x)$

Resolución

Gráficamente:



Encontremos los puntos de intersección respecto al eje x:

$$y = y \Longrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \cos x$$

$$\Longrightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x = \cos x$$

$$\Longrightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0$$

$$\Longrightarrow \cos x\,(2\operatorname{sen} x - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow \cos x = 0 \quad o \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \cos x = 0 \quad o \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad o \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \operatorname{sen} 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \operatorname{sen} 2x)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} 2x - \cos x)dx$$

$$= \left[\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} - \left[\frac{1}{2}\cos 2x + \operatorname{sen} x\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{2}\cos(\pi) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Respuesta

Así el área es: $\frac{1}{2}$

Funciones

1551. El perímetro de un rectángulo es $20\,m$, exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

Resolución

Si el perímetro del rectángulo es $20\,m$ entonces:

$P = 2a + 2b \Longrightarrow 20 = 2a + 2b$

$\Longrightarrow 20 - 2b = 2a$

$\Longrightarrow 10 - b = a \quad (1)$

El área de un rectángulo es:

$A = ab \quad (2)$

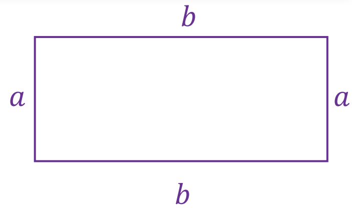
Reemplazando (1) en (2):

$A = ab \Longrightarrow A = (10 - b)b = 10b - b^2$

$\Longrightarrow A(b) = 10b - b^2$

Analizando el dominio de b, por (5) se tiene:

$A(b) = 10b - b^2\,;\ 0 < b < 10$



Se sabe que: $0 < ab \leq A \quad (3)$

$20 = 2a + 2b \Longrightarrow 10 = a + b$

$\Longrightarrow 10b = ab + b^2$

$10b - b^2 = ab = A \quad (4)$

Reemplazando (4) en (3)

$0 < ab \leq 10b - b^2 \quad //\div$ b

$\Longrightarrow 0 < a \leq 10 - b$

$\Longrightarrow 0 < 10 - b$ transitividad

$\Longrightarrow 0 < b < 10 \quad (5)$

Respuesta

El área en función de su lado b es:
$A(b) = 10b - b^2$ donde $0 < b < 10$

1552. Determinar si la función f es función par o impar.

$$f(x) = 1 + 6x^2 - x^4$$

Resolución

Si $f(-x) = f(x)$, entonces es una función par.
Si $f(-x) = -f(x)$, entonces es una función impar.
Según las definiciones función par o impar, solo es necesario evaluar x en $-x$ y ver el resultado, es decir:

$$f(x) = 1 + 6x^2 - x^4 \Longrightarrow f(-x) = 1 + 6(-x)^2 - (-x)^4$$

$$\Longrightarrow f(-x) = 1 + 6x^2 - x^4 = f(x) \Longrightarrow f(-x) = f(x)$$

Respuesta

Así $f(x)$ es una función par.

1553. Determinar si la función f es par o impar.

$$f(x)=\frac{5}{x+x^3}$$

Resolución

Según las definiciones función par o impar, solo es necesario evaluar x en $-x$ y ver el resultado, es decir:

$$f(x)=\frac{5}{x+x^3}\Rightarrow f(-x)=\frac{5}{(-x)+(-x)^3}=\frac{5}{-x-x^3}=\frac{5}{-(x+x^3)}$$

$$\Rightarrow f(-x)=-\frac{5}{x+x^3}=-f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x)=-f(x)$$

Respuesta

Así $f(x)$ es una función impar, pues $f(-x)=-f(x)$.

1554. Si f y g son funciones pares, ¿ qué pasa con la función $f+g$?

Resolución

Si f es un función par entonces: $f(x)=f(-x)$
Si g es un función par entonces: $g(x)=g(-x)$

Si f y g son dos funciones, pueden combinarse y formar la función $f+g$ es decir:

$$f(x)+g(x)=(f+g)(x)$$

Sea:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)\qquad f,g \text{ son funciones pares}$$

$$=(f+g)(-x)$$

Así, si f y g son funciones pares entonces $f+g$ es una función par.

Respuesta

$f+g$ función par.

1555. Sean las funciones:

$$f(x)=x^4+2x^2,\qquad g(x)=x^2$$

Encuentre:

$$f+g, f-g, f\cdot g \text{ y } \frac{f}{g}$$

Resolución

Por las operaciones de funciones se tendrá:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow (f+g)(x)=x^4+2x^2+x^2$$
$$\Rightarrow (f+g)(x)=x^4+3x^2$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow (f-g)(x)=x^4+2x^2-x^2$$
$$\Rightarrow (f-g)(x)=x^4+x^2$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)\Rightarrow (f\cdot g)(x)=(x^4+2x^2)x^2$$
$$\Rightarrow (f\cdot g)(x)=x^6+2x^4$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^4+2x^2}{x^2}=\frac{x^2(x^2+2)}{x^2}=x^2+2$$
$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=x^2+2$$

Respuesta

Las soluciones son:

$x^4+3x^2, x^4+x^2, x^6+2x^4$ y x^2+2

1556. Mediante la siguiente tabla:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	5	6	4	3	2	1
$g(x)$	6	1	3	5	2	4

Encontrar los valores de:

$$f(g(1)), g(f(1)), (g\circ f)(3), (f\circ g)(6)$$

Resolución

$$f(g(1))=f(6)=1$$
$$g(f(1))=g(5)=2$$
$$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(4)=5$$
$$(f\circ g)(6)=f(g(6))=f(4)=3$$

Respuesta

Los valores son: 1,2,5 y 3

1557. Sean las funciones:

$$f(x) = 3x - 5 \text{ y } g(x) = x^2 + x$$

Encontrar las funciones:

$$(g \circ f)(x), (f \circ g)(x), (f \circ f)(x) \text{ y } (g \circ g)(x)$$

Resolución

Tenemos como datos:

$$f(x) = 3x - 5 \text{ y } g(x) = x^2 + x$$

Sea:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(3x - 5)$$

$$\Rightarrow g(3x - 5) = (3x - 5)^2 + (3x - 5) = 9x^2 - 30x + 25 + 3x - 5$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = 9x^2 - 27x + 20$$

Sea:

$$f\big(g(x)\big) = f(x^2 + x)$$

$$\Rightarrow f(x^2 + x) = 3(x^2 + x) - 5 = 3x^2 + 3x - 5$$

$$\Rightarrow f\big(g(x)\big) = 3x^2 + 3x - 5$$

Sea:

$$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f(3x - 5)$$

$$\Rightarrow f(3x - 5) = 3(3x - 5) - 5 = 9x - 15 - 5 = 9x - 20$$

$$\Rightarrow (f \circ f)(x) = 9x - 20$$

Sea:

$$(g \circ g)(x) = g\big(g(x)\big) = g(x^2 + x)$$

$$\Rightarrow g(x^2 + x) = (x^2 + x)^2 + x^2 + x = x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 + x$$

$$\Rightarrow (g \circ g)(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$$

Respuesta

Los valores de las funciones son:

$9x^2 - 27x + 20, 3x^2 + 3x - 5, 9x - 20, x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$

1558. Determinar la composición $f \circ g \circ h$, de las funciones

$$f(x) = 5x - 2,\ g(x) = sen\, x \text{ y } h(x) = x^2$$

Resolución

Tenemos los datos:

$$f(x) = 5x - 2,\ g(x) = sen\, x \text{ y } h(x) = x^2$$

Sea:

$$(f \circ g \circ h)(x) = \left(f \circ g\left(h(x)\right)\right) = f\left(g\left(h(x)\right)\right) = \left(f\left(g(x^2)\right)\right)$$

Si:

$$g(x) = sen\, x \Longrightarrow g(x^2) = sen\, x^2$$

Retomando:

$$\left(f\left(g(x^2)\right)\right) = f(sen\, x^2)$$

Si:

$$f(x) = 5x - 2 \Longrightarrow f(sen\, x^2) = 5sen\, x^2 - 2$$

Así:

$$(f \circ g \circ h)(x) = 5sen\, x^2 - 2$$

Respuesta

La solución es: $5sen\, x^2 - 2$

Límites

1559. Sean las funciones:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 6 \qquad \lim_{x\to 3} g(x) = -3$$

Encuentre los siguientes límites si existen.

a) $\lim\limits_{x\to 3}[f(x) + g(x)]$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3}[g(x)]^3$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{f(x)}{2g(x)}\right)$

Resolución

Usando las propiedades de límites se obtendrán los resultados.

a) $\lim\limits_{x\to 3}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to 3} f(x) + \lim\limits_{x\to 3} g(x) = 6 - 3 = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 3}[g(x)]^3 = \lim\limits_{x\to 3}[g(x) \cdot g(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to 3} g(x) \cdot \lim\limits_{x\to 3} g(x) \cdot \lim\limits_{x\to 3} g(x)$

$$= (-3)(-3)(-3) = -27$$

c) $\lim_{x\to3}\left(\frac{f(x)}{2g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to3} f(x)}{\lim_{x\to3} 2g(x)}=\frac{\lim_{x\to3} f(x)}{2\lim_{x\to3} g(x)}=\frac{6}{2\cdot(-3)}=-1$

Respuesta

Las respuestas a los límites son: 3,-27 y -1

1560. Encuentre el $\lim_{x\to1} h(x)$ donde:

$$h(x)=\begin{cases}5x+3\ ; x\neq 1\\ \pi\quad ; x=1\end{cases}$$

Resolución

Nótese que $h(x)$ está definida en $x=1$, es $h(1)=\pi$, pero el valor del límite cuando x tiende a 1, no depende del valor de la función en 1. Ya que $h(x)=5x+3$ para $x\neq 1$, se tiene:

$$\lim_{x\to1} h(x)=\lim_{x\to1}(5x+3)=5\cdot1+3=8$$

Respuesta

Así $\lim_{x\to1} h(x)=8$.

1561. Argumente por qué el $\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$ no existe.

Resolución

Sea la función $f(x)=\frac{|x|}{x}$, con $|x|$ definido por:

$$|x|=\begin{cases}x\ ; x\geq 0\\ -x\ ; x<0\end{cases}$$

Cuando $x\geq 0$ entonces $|x|=x$, tal que:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1$$

Cuando $x<0$ entonces $|x|=-x$, tal que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

Como los límites laterales son diferentes, $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

Respuesta

Por la definición de existencia del límite de una función:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \nexists$$

1562. Determinar si el límite de la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-5} & ; x > 5 \\ 10 - 2x & ; x < 5 \end{cases}$$

existe cuando x tiende a 5.

Resolución

Para la función $f(x) = \sqrt{x-5}$ cuando $x > 5$ se tiene:

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \left(\sqrt{x-5}\right) = \sqrt{5-5} = 0$$

Para la función $f(x) = 10 - 2x$ cuando $x < 5$ se tiene:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} (10 - 2x) = 10 - 2 \cdot 5 = 0$$

Así:

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^-} f(x) = 0$$

Por tanto, límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a 5 existe.

Respuesta

El límite de la función $f(x)$ existe y tiende a 5.

1563. Determinar el límite:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{25+x} - \sqrt{25-x}}{x} \right)$$

Resolución

Se puede ver que si se aplica el límite al valor que tiende, resulta una indeterminación, para levantar la misma se debe racionalizar la parte del numerador:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{25+x}-\sqrt{25-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{25+x}+\sqrt{25-x}}{\sqrt{25+x}+\sqrt{25-x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{25+x}\right)^2-\left(\sqrt{25-x}\right)^2}{x\left(\sqrt{25+x}+\sqrt{25-x}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(25+x)-(25-x)}{x\left(\sqrt{25+x}+\sqrt{25-x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{25+x-25+x}{x\left(\sqrt{25+x}+\sqrt{25-x}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x\left(\sqrt{25+x}+\sqrt{25-x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sqrt{25+x}+\sqrt{25-x}}\right)=\frac{2}{\sqrt{25+0}+\sqrt{25-0}}=\frac{2}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{5}$$

Respuesta

Así el límite es $\frac{1}{5}$.

1564. Evalúe el siguiente límite y determine si existe:

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^4-1}\right)$$

Resolución

Notar que, evaluando el límite, dará una indeterminación, luego:

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^4-1}\right)=\lim_{x\to -1}\left(\frac{(x+1)^2}{(x^2-1)(x^2+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1}\left(\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to -1}\left(\frac{(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}\right)$$

$$=\frac{(-1+1)}{\left((-1)^2+1\right)(-1-1)}=\frac{0}{-4}=0$$

Es válido que el numerador resulte 0.

Respuesta

El límite existe y es 0.

1565. Hallar el siguiente límite y determine si existe o no, si el límite no existe justifique por qué.

$$\lim_{x\to -6}\left(\frac{2x+12}{|x+6|}\right)$$

Resolución

Definir primero $|x+6|$ es decir:

$$|x+6| = \begin{cases} x+6 & x+6\geq 0 \\ -(x+6) & x+6<0 \end{cases} \Longrightarrow |x+6| = \begin{cases} x+6 & x\geq -6 \\ -(x+6) & x<-6 \end{cases}$$

Si existiera el límite entonces los límites laterales serian iguales.

Si $x \geq -6$ entonces $x+6$ tal que:

$$\lim_{x\to -6^+}\left(\frac{2x+12}{|x+6|}\right) = \lim_{x\to -6^+}\left(\frac{2x+12}{x+6}\right) = \lim_{x\to -6^+}\left(\frac{2(x+6)}{x+6}\right) = \lim_{x\to -6^+}(2) = 2$$

Si $x<-6$ entonces $-(x+6)$ tal que:

$$\lim_{x\to -6^-}\left(\frac{2x+12}{|x+6|}\right) = \lim_{x\to -6^-}\left(\frac{2x+12}{-(x+6)}\right) = \lim_{x\to -6^-}\left(\frac{2(x+6)}{-(x+6)}\right)$$

$$= \lim_{x\to -6^-}\left(-\frac{2(x+6)}{x+6}\right) = \lim_{x\to -6^-}(-2) = -2$$

Como $2 \neq -2$, el limite no existe.

Respuesta

No existe límite pues los límites laterales no son iguales.

Continuidad

1566. Hallar el límite al infinito dado por:

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1-x-x^2}{2x^2-7}\right)$$

Resolución

Si se evalúa directamente el límite resulta una indeterminación, levantando la misma:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x-x^2}{2x^2-7}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x-x^2}{2x^2-7}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{7}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1}{2-\frac{7}{x^2}}\right)$$

$$=\frac{0-0-1}{2-0}=-\frac{1}{2}$$

Respuesta

Así el límite de la función $\dfrac{1-x-x^2}{2x^2-7}$ cuando x tiende a infinito es $-\dfrac{1}{2}$.

1567. Determinar el valor de:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3-5}$$

Resolución

Si se evalúa directamente el límite resulta una indeterminación luego:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3-5}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3-5}\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{x^3}\right)^2}}{\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{x^3}\right)^2(9x^6-x)}}{\frac{1}{x^3}(x^3-5)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^6}(9x^6-x)}}{\frac{1}{x^3}(x^3-5)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{9x^6}{x^6}-\frac{x}{x^6}}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{5}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9-\frac{1}{x^5}}}{1-\frac{5}{x^3}}=\frac{\sqrt{9-0}}{1-0}=3$$

Respuesta

Por tanto: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3-5}=3$

1568. Encontrar el valor de:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)$$

Resolución

Claramente resulta una indeterminación del tipo ∞-∞, aplicando la conjugada:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)\cdot\frac{\sqrt{4x^2+3x}+2x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{4x^2+3x}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3x}{x}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2(4x^2+3x)}+\frac{2x}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3x}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+\frac{2x}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}\right)$$

$$=\frac{3}{\sqrt{4+0}+2}=\frac{3}{4}$$

Respuesta

La solución es $\frac{3}{4}$.

1569. Identificar el valor del límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x}{x^3-x+2}$$

Resolución

Claramente resulta una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, luego:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x}{x^3-x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x}{x^3-x+2}\cdot\frac{\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{0+0}{1-0+0}$$

$$=\frac{0}{1}=0$$

Respuesta

El valor del límite es 0

1570. Determinar el valor del límite dado por:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Resolución

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}}{\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right)=0$$

Dato importante

Por definición se sabe que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)=0$$

Respuesta

Así el resultado es 0.

1571. Encontrar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)$$

Resolución

Evaluemos el límite de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}}{\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}}\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}-\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}-1\right)=0-1=-1$$

Dato importante

Se sabe que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos x}{x}\right)=0$$

Respuesta

Así el resultado es -1.

1572. Hallar el límite dado por:

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{20y-\cos 5y}{5y-\operatorname{sen}5y}\right)$$

Resolución

Sea:

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{20y-\cos 5y}{5y-\operatorname{sen}5y}\right)=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{20y-\cos 5y}{5y-\operatorname{sen}5y}\cdot\frac{\frac{1}{5y}}{\frac{1}{5y}}\right)$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{\frac{20y}{5y}-\frac{\cos 5y}{5y}}{\frac{5y}{5y}-\frac{\operatorname{sen}5y}{5y}}\right)=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{4-\frac{\cos 5y}{5y}}{1-\frac{\operatorname{sen}5y}{5y}}\right)=\frac{4-0}{1-0}=4$$

Respuesta

El valor del límite es 4.

La derivada

1573. Encontrar la derivada de la función dada por:

$$f(x) = (5x^2 - 7x)e^x$$

Resolución

Por la regla del producto se sabe que:

$$f(x) = g(x)h(x) \Longrightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

Así, se tendrá:

$$\begin{aligned} f(x) = (5x^2 - 7x)e^x \Longrightarrow f'(x) &= (5x^2 - 7x)'e^x + (5x^2 - 7x)(e^x)' \\ \Longrightarrow f'(x) &= (5x^2 - 7x)'e^x + (5x^2 - 7x)(e^x)' \\ &= (10x - 7)e^x + (5x^2 - 7x)e^x \\ &= 10xe^x - 7e^x + 5x^2e^x - 7xe^x \\ &= 5x^2e^x + 3xe^x - 7e^x \end{aligned}$$

Respuesta

La derivada es: $f'(x) = 5x^2e^x + 3xe^x - 7e^x$

1574. Determinar la derivada de la función:

$$f(a) = (a^3 - 2a)(a^{-4} + a^{-2})$$

Resolución

Sea:

$$f(a) = (a^3 - 2a)(a^{-4} + a^{-2})$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow f'(a) &= (a^3 - 2a)'(a^{-4} + a^{-2}) + (a^3 - 2a)(a^{-4} + a^{-2})' \\ &= (3a^2 - 2)(a^{-4} + a^{-2}) + (a^3 - 2a)(-4a^{-5} - 2a^{-3}) \\ &= 3a^2a^{-4} + 3a^2a^{-2} - (2a^{-4} + 2a^{-2}) + (-4a^3a^{-5} - 2a^3a^{-3}) \\ &\qquad -(-8aa^{-5} - 4aa^{-3}) \\ &= 3a^{-2} + 3 - 2a^{-4} - 2a^{-2} - 4a^{-2} - 2 + 8a^{-4} + 4a^{-2} \\ &= 1 + 6a^{-4} + a^{-2} \end{aligned}$$

Respuesta

Por tanto la deriva es: $f'(a) = 1 + 6a^{-4} + a^{-2}$

1575. Determinar la primera derivada de:

$$y = \frac{x^2+1}{x^3-1}$$

Resolución

Por la regla del cociente:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{\left(h(x)\right)^2}$$

$$y = \frac{x^2+1}{x^3-1} \Rightarrow y' = \frac{(x^2+1)'(x^3-1) - (x^2+1)(x^3-1)'}{(x^3-1)^2}$$

$$= \frac{2x(x^3-1) - (x^2+1)3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{(2x^4-2x) - (3x^4+3x^2)}{(x^3-1)^2}$$

$$= \frac{2x^4-2x-3x^4-3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{-x^4-3x^2-2x}{(x^3-1)^2}$$

$$= -\frac{x^4+3x^2+2x}{(x^3-1)^2}$$

Respuesta

La derivada de y es: $-\frac{x^4+3x^2+2x}{(x^3-1)^2}$

1576. Hallar la derivada de la función:

$$M(t) = \frac{At}{Bt^2+Ct^3}$$

Resolución

Sea:

$$M(t) = \frac{At}{Bt^2+Ct^3} \Rightarrow M'(t) = \frac{(At)'(Bt^2+Ct^3) - (At)(Bt^2+Ct^3)'}{(Bt^2+Ct^3)^2}$$

$$= \frac{A(Bt^2 + Ct^3) - (At)(2Bt + 3Ct^2)}{(Bt^2 + Ct^3)^2}$$

$$= \frac{(ABt^2 + ACt^3) - (2ABt^2 + 3ACt^3)}{(Bt^2 + Ct^3)^2}$$

$$= \frac{ABt^2 + ACt^3 - 2ABt^2 - 3ACt^3}{(Bt^2 + Ct^3)^2}$$

$$= \frac{-ABt^2 - 2ACt^3}{(Bt^2 + Ct^3)^2} = -\frac{At^2(B + 2Ct)}{(Bt^2 + Ct^3)^2}$$

Respuesta

El resultado es: $-\dfrac{At^2(B + 2Ct)}{(Bt^2 + Ct^3)^2}$

1577. Encontrar la derivada trigonométrica, dada por:

$$f(\theta) = \theta \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Resolución

Recordando algunas derivadas trigonométricas:

$$\boxed{(\operatorname{sen} x)' = \operatorname{sen}' x = \cos x} \qquad \boxed{(\cos x)' = \cos' x = -\operatorname{sen} x}$$

$$\boxed{1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = (\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2}$$

Sea:

$$f(\theta) = \theta \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \Longrightarrow f'(\theta) = \theta' \cdot (\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta) + \theta \cdot (\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta)'$$

$$= \theta' \cdot (\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta) + \theta \cdot \big((\cos\theta)' \cdot \operatorname{sen}\theta + (\operatorname{sen}\theta)' \cdot \cos\theta\big)$$

$$= 1 \cdot (\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta) + \theta \cdot \big((-\operatorname{sen}\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \cdot \cos\theta\big)$$

$$= (\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta) + \theta \cdot (-(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2)$$

$$= (\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta) + \theta \cdot \big((\cos\theta)^2 - 1 + (\cos\theta)^2\big)$$

$$= (\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta) + \theta \cdot (2(\cos\theta)^2 - 1)$$

$$= (\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta) + 2\theta(\cos\theta)^2 - \theta$$

$$= \cos\theta\left(\operatorname{sen}\theta + 2\theta(\cos\theta)\right) - \theta$$

Respuesta

Así, la derivada es: $\cos\theta\left(\operatorname{sen}\theta + 2\theta(\cos\theta)\right) - \theta$

1578. Demuestre que:

$$\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotan} x$$

Resolución

Se sabe que:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \Longrightarrow \operatorname{cosec}' x = \frac{1' \cdot \operatorname{sen} x - 1 \cdot \operatorname{sen}' x}{(\operatorname{sen} x)^2}$$

$$= \frac{0 \cdot \operatorname{sen} x - 1 \cdot \cos x}{(\operatorname{sen} x)^2} = -\frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^2} = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotan} x$$

Respuesta

Por tanto es cierto que: $\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotan} x$

1579. Determinar la derivada de la función:

$$y = \sec x$$

Resolución

Sea:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \Longrightarrow y' = \frac{1' \cdot \cos x - 1 \cdot \cos' x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$= \sec x \cdot \tan x$$

Respuesta

Así la derivada de y' es: $\sec x \cdot \tan x$

Aplicación de la derivada

1580. Encuentre el límite de la función, utilizando L'Hôpital donde sea apropiado.

$$\lim_{a\to 4}\frac{a^2-2a-8}{a-4}$$

Resolución

Se usa la regla de L'Hôpital cuando se tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

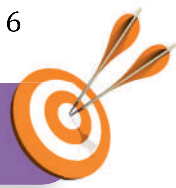
Sea:

$$\lim_{a\to 4}\frac{a^2-2a-8}{a-4}=\frac{4^2-2(4)-8}{4-4}=\frac{0}{0}$$

Se puede aplicar L'Hôpital, ya que hay indeterminación $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{a\to 4}\frac{a^2-2a-8}{a-4}=\lim_{a\to 4}\frac{(a^2-2a-8)'}{(a-4)'}=\lim_{a\to 4}\frac{2a-2-0}{1-0}$$

$$=\lim_{a\to 4}(2a-2)=2(4)-2=6$$



Respuesta

El límite es 6.

1581. Halle el límite de:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6x^2+5x-4}{4x^2+16x-9}$$

utilizando L'Hôpital.

Resolución

Sea:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6x^2+5x-4}{4x^2+16x-9}=\frac{6\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\left(\frac{1}{2}\right)-4}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2+16\left(\frac{1}{2}\right)-9}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-4}{1+8-9}=\frac{0}{0}$$

Usando L'Hôpital se tendrá:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6x^2+5x-4}{4x^2+16x-9}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(6x^2+5x-4)'}{(4x^2+16x-9)'}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{12x+5-0}{8x+16-0}$$

$$=\frac{12\left(\frac{1}{2}\right)+5}{8\left(\frac{1}{2}\right)+16}=\frac{6+5}{4+16}=\frac{11}{20}$$

Respuesta

Por tanto el resultado es $\frac{11}{20}$.

1582. Hallar el límite usando la regla de L' Hôpitial.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x}$$

Resolución

Notar que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x}=\frac{0}{0}$$

Por tanto, se puede aplicar L' Hôpitial es decir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}\right)'}{x'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2-\frac{1}{2}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4)}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left((1+2x)^{-\frac{1}{2}}+2(1-4x)^{-\frac{1}{2}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x}}+\frac{2}{\sqrt{1-4x}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+2(0)}}+\frac{2}{\sqrt{1-4(0)}}=1+2=3$$

Respuesta

Así la derivada es 3.

1583. Hallar el límite de:

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

usando la regla de L'Hôpital.

Resolución

Observar:

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{1 + \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{1 + \cos \pi} = \frac{1 - 1}{1 + (-1)} = \frac{0}{0}$$

Entonces por L'Hôpital:

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \operatorname{sen} \alpha)'}{(1 + \cos 2\alpha)'} = \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos \alpha}{-\operatorname{sen}(2\alpha) \cdot 2}$$

$$= \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{2 \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0}{0}$$

Aplicando otra vez la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos \alpha}{-2 \operatorname{sen}(2\alpha)} = \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{-2\cos(2\alpha) \cdot 2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{-4\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{-4 \cdot (-1)} = \frac{1}{4}$$

Respuesta

El límite es $\frac{1}{4}$.

1584. Determine el límite trigonométrico usando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{t \to 0} \cot an\, 2t \cdot \operatorname{sen} 6t$$

Resolución

Sea:

$$\lim_{t \to 0} \operatorname{cotan} 2t \cdot \operatorname{sen} 6t = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 6t}{\tan 2t} = \frac{\operatorname{sen} 0}{\tan 0} = \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} 6t}{\tan 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{(\operatorname{sen} 6t)'}{(\tan 2t)'}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(6t)\cdot 6}{\sec^2(2t)\cdot 2}$$

$$=\frac{\cos(0)\cdot 6}{\sec^2(0)\cdot 2}=\frac{1\cdot 6}{1\cdot 2}=3$$

Respuesta

El resultado es 3.

1585. Determinar el límite de:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

usando la regla de L'Hôpital.

Resolución

Notar que:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)(\ln x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)(\ln x)}\right)=\frac{1\ln 1-1+1}{(1-1)(\ln 1)}=\frac{0}{0}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)(\ln x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x\ln x-x+1)'}{((x-1)(\ln x))'}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1+0}{1(\ln x)+(x-1)\left(\frac{1}{x}\right)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1+0}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\right)=\frac{\ln 1}{\ln 1+1-\frac{1}{1}}=\frac{0}{0}$$

Aplicando una vez más la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(\ln x)'}{\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)'}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+0+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}=\frac{1}{2}$$

Respuesta

Así el límite es $\frac{1}{2}$.

1584. Hallar el límite usando la regla de L' Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$$

Resolución

Para usar la regla de L' Hôpital se debe tener $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, no vale ∞-∞.
Sea:

$$y=(1-2x)^{\frac{1}{x}}\Longrightarrow \ln y=\ln(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln(1-2x)=\frac{\ln(1-2x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{x}=\frac{\ln\left(1-2(0)\right)}{0}=\frac{0}{0}$$

Aplicando L' Hôpital se tendrá:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1-2x))'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{1-2x}}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{2}{1-2x}=-\frac{2}{1-2(0)}=-2$$

Así, en el ejercicio original se tendrá:

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y}=e^{-2}$$

Respuesta

El resultado del límite es e^{-2}.

La integral

1587. Evaluar la integral dada por:

$$\int xe^{-x^2}\,dx$$

Resolución

Se hace un cambio de variable, al valor apropiado:

$$\int xe^{-x^2}\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u = -x^2 \\ du = -2x\,dx \Longrightarrow dx = -\dfrac{1}{2x}du \end{cases}$$

Reemplazando en la integral:

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \int xe^{u}\left(-\frac{1}{2x}\right)du = \int e^{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{u}\,du = -\frac{1}{2}e^{u} + C$$

Volviendo a reemplazar la variable $u = -x^2$, es decir:

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{u} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

donde C es una constante.

Respuesta

La integral es: $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2} + C$

1588. Hallar el valor de la integral dada por:

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

Resolución

Tomando:

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u = x^3 + 1 \\ du = 3x^2\,dx \Longrightarrow dx = \dfrac{1}{3x^2}du \end{cases}$$

Reemplazando en la integral se tendrá:

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\int x^2\sqrt{u}\cdot\frac{1}{3x^2}du=\int u^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{3}du$$

$$=\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{3}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{3}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+C$$

Reemplazar la variable $u=x^3+1$, es decir:

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

donde C es una constante.

Respuesta

El resultado es: $\frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C$

1589. Encontrar el valor de la integral:

$$\int \cos^3\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha$$

Resolución

$$\int \cos^3\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha \Longrightarrow \begin{cases} u=\operatorname{sen}\alpha \\ du=\cos\alpha\ d\alpha \Longrightarrow d\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}du \end{cases}$$

Reemplazando:

$$\int \cos^3\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha=\int \cos^3\alpha\cdot u\frac{1}{\cos\alpha}du$$

$$=\int u\cdot\frac{(\cos\alpha)^3}{\cos\alpha}du=\int u\cdot(\cos\alpha)^2du=\int u\cdot\cos^2\alpha\,du$$

Recordando la identidad pitagórica:

$$\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1\Longrightarrow\cos^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\alpha$$

En la integral:

$$\int u\cdot\cos^2\alpha\,du=\int u\cdot(1-\operatorname{sen}^2\alpha)du=\int u\cdot(1-(\operatorname{sen}\alpha)^2)du$$

$$=\int u\cdot(1-u^2)du=\int(u-u^3)\,du=\int u\,du-\int u^3\,du$$

$$=\frac{u^2}{2}+C_1-\frac{u^4}{4}+C_2=\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}+C_1+C_2=\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}+C$$

Reemplazar la variable $u=\operatorname{sen}\alpha$, es decir:

$$\int\cos^3\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha=\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{4}+C=\frac{(\operatorname{sen}\alpha)^2}{2}-\frac{(\operatorname{sen}\alpha)^4}{4}+C$$

donde $C=C_1+C_2$, es una constante.

Respuesta

Así el valor de la integral es: $\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha)^2}{2}-\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha)^4}{4}+C$

1590. Hallar la integral dada por:

$$\int 5^y\operatorname{sen}(5^y)\,dy$$

Resolución

Aplicando la definición de la derivada para exponentes, se tendrá:

$$\int 5^y\operatorname{sen}(5^y)\,dy\Longrightarrow\begin{cases} u=5^y\\ du=5^y\ln 5\,dy\Longrightarrow dy=\dfrac{1}{5^y\ln 5}du\end{cases}$$

Reemplazando:

$$\int 5^y\operatorname{sen}(5^y)\,dy=\int 5^y\operatorname{sen}u\frac{1}{5^y\ln 5}du$$

$$=\int u\operatorname{sen}u\frac{1}{u\ln 5}du=\frac{1}{\ln 5}\int\operatorname{sen}u\,du$$

$$= \frac{1}{\ln 5}(-\cos u) + C = -\frac{1}{\ln 5}\cos(5^y) + C$$

Respuesta

El resultado es: $-\dfrac{1}{\ln 5}\cos(5^y) + C$

1591. Determinar el valor de la integral indefina dada por:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}dx$$

Resolución

Recordemos que la definición trigonométrica del ángulo doble y la identidad pitagórica:

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x \quad \text{y} \quad \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

Si:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}dx \Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \\ du = -\operatorname{sen} x \; dx \Rightarrow -\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\; du = dx \end{cases}$$

Reemplazando los valores en la integral:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x \cdot u}{1+u^2}\cdot\left(-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)du$$

$$= \int -\frac{2u}{1+u^2}du = -2\int \frac{u}{1+u^2}du$$

Aplicar otra vez un cambio de variable:

$$-2\int \frac{u}{1+u^2}du \Rightarrow \begin{cases} v = 1+u^2 \\ dv = 2u\,du \Rightarrow \dfrac{1}{2u}dv = du \end{cases}$$

Reemplazando:

$$-2\int \frac{u}{1+u^2}du = -2\int \frac{u}{v}\cdot\frac{1}{2u}dv = -2\int \frac{1}{v}\cdot\frac{1}{2}dv$$

$$= -\int \frac{1}{v}dv = -\ln v + C$$

Reemplazando los cambios de variables que se hizo:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx = C - \ln v = C - \ln(1+u^2) = C - \ln(1+(\cos x)^2)$$

$$= C - \ln(1+\cos^2 x)$$

Respuesta

Así, la integral equivale a: $C - \ln(1+\cos^2 x)$

1592. Encontrar el valor de la integral dada por:

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$$

Resolución

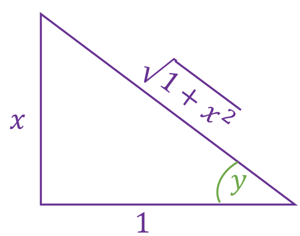
Reinterpretar la integral, es decir:

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \underbrace{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx}_{(1)} + \underbrace{\int \frac{x}{1+x^2}\,dx}_{(2)}$$

Evaluar por separado, para (1) se tendrá:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Gráficamente:



Con funciones trigonométricas para hacer el cambio de variable, de la imagen se deduce:

$$\operatorname{sen} y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan y = \frac{x}{1} = x$$

Tomando:

$$x = \tan y \Rightarrow x' = y' \cdot \sec^2 y \Rightarrow \frac{1}{\sec^2 y} \cdot 1 = y' \Rightarrow \cos^2 y = y'$$

$$\Rightarrow (\cos y)^2 = y' \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = y' \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = y'$$

Si:

$$x = \tan y \Longrightarrow \tan^{-1} x = y$$

Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que:

$$\int f' \, dx = f + C$$

Y para la integral se tendrá:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int y' \, dx = y + C = \tan^{-1} x + C_1 \qquad (3)$$

Para (2) se tendrá:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx \Longrightarrow \begin{cases} u = 1 + x^2 \\ du = 2x \, dx \Longrightarrow dx = \dfrac{1}{2x} du \end{cases}$$

Reemplazando:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{u} \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u + C_2$$

Por el cambio de variable se tiene:

$$\frac{1}{2} \ln u + C_2 = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C_2 \qquad (4)$$

Así, reemplazando (3) y (4) en la integral reinterpretada se tendrá:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C_1 + \frac{1}{2} \ln x + C_2$$

$$= \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C \quad \text{donde} \quad C = C_1 + C_2$$

Respuesta

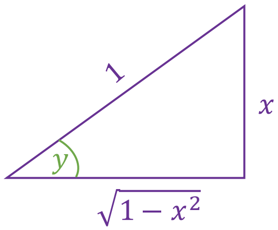
Así, la integral equivale a: $\tan^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$

1593. Determinar el valor de la integral dada por:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Resolución

Gráficamente:



Tomando las funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} y=\frac{x}{1},\cos y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1},\tan y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

donde:

$$x=\operatorname{sen} y \Longrightarrow x'=y'\cos y \Longrightarrow \frac{1}{\cos y}\cdot 1=y'$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=y'$$

Si:

$$\operatorname{sen} y=x \Longrightarrow y=\operatorname{sen}^{-1} x$$

Para la integral se tendrá:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int y'\,dx=y+C=\operatorname{sen}^{-1} x+C$$

Respuesta

El resultado es: $\operatorname{sen}^{-1} x+C$

1594. Hallar la integral:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

Resolución

Sea:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u=1+x^2 \Longrightarrow x^2=u-1 \\ du=2x\,dx \Longrightarrow \dfrac{1}{2x}\,du=dx \end{cases}$$

Para la integral se tendrá:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)du = \frac{1}{2}\int \frac{u}{\sqrt{u}}du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int u\cdot u^{-\frac{1}{2}}du - \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du - \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C_1 - \frac{1}{2}\cdot 2u^{\frac{1}{2}} + C_2 = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} + C_1 + C_2$$

$$= \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} + C \quad \text{donde} \quad C = C_1 + C_2$$

$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

Respuesta

La integral es: $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C$

1595. Determinar la integral dada por:

$$\int x(2x+5)^8\,dx$$

Resolución

Si:

$$\int x(2x+5)^8\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u = 2x+5 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}(u-5) \\ du = 2\,dx \Longrightarrow \frac{1}{2}du = dx \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int x(2x+5)^8\,dx = \int \frac{1}{2}(u-5)u^8\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{4}\int (u^9 - 5u^8)\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{10}u^{10} - \frac{5}{9}u^9\right) + C = \frac{1}{40}u^{10} - \frac{5}{36}u^9 + C$$

Reemplazando el cambio de variable:

$$\frac{1}{40}u^{10} - \frac{5}{36}u^9 + C = \frac{1}{40}(2x+5)^{10} - \frac{5}{36}(2x+5)^9 + C$$

Respuesta
La integral es: $\frac{1}{40}(2x+5)^{10}-\frac{5}{36}(2x+5)^{9}+C$

Aplicaciones de la integral

1596. Encontrar el volumen del sólido, al girar la región delimitada por las curvas dadas alrededor de la recta específica.

$$y=2-\frac{1}{2}x, \qquad y=0, \qquad x=1, \qquad x=2$$

alrededor del eje x.

Resolución

Para determinar el volumen del solido se analiza la integral:

$$V(x)=\int_a^b \pi\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx$$

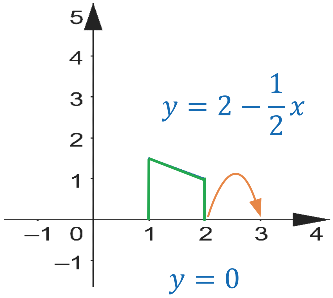
Así:

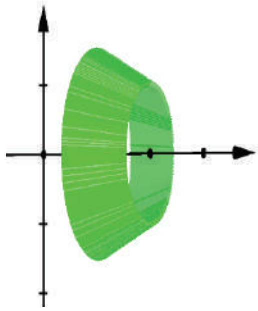
$$V(x)=\int_1^2 \pi\left(2-\frac{1}{2}x\right)^2 dx=\pi\int_1^2\left(4-2x+\frac{1}{4}x^2\right)dx$$

$$=\pi\left(4x-x^2+\frac{1}{12}x^3\right)\Bigg|_1^2=\pi\left[\left(4\cdot 2-2^2+\frac{1}{12}\cdot 2^3\right)-\left(4\cdot 1-1^2+\frac{1}{12}\cdot 1^3\right)\right]$$

$$=\pi\left[\left(4+\frac{2}{3}\right)-\left(3+\frac{1}{12}\right)\right]=\pi\left[\left(\frac{14}{3}\right)-\left(\frac{37}{12}\right)\right]=\frac{19}{12}\pi$$

Gráficamente rotaria de la siguiente manera:





Respuesta

El volumen del solido es $\frac{19}{12}\pi$.

1597. Calcular el volumen del sólido formado al girar la región delimitada por las curvas proporcionadas, alrededor del eje x.

$$y = \sqrt{x-1}, \qquad y = 0, \qquad x = 5$$

Resolución

Es una sección transversal con un radio de $\sqrt{x-1}$, su área será:

$$A(x) = \pi\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = \pi(x-1)$$

Determinando el parámetro respecto al eje x, se tiene:

$$y = y \Longrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Por tanto, los parámetros son $x = 1$ y $x = 5$.

Para el volumen se tendrá:

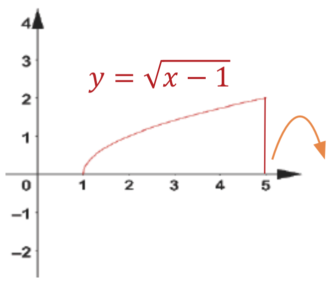
$$V(x) = \int_a^b \pi A(x)dx \Longrightarrow V(x) = \int_1^5 \pi(x-1)dx$$

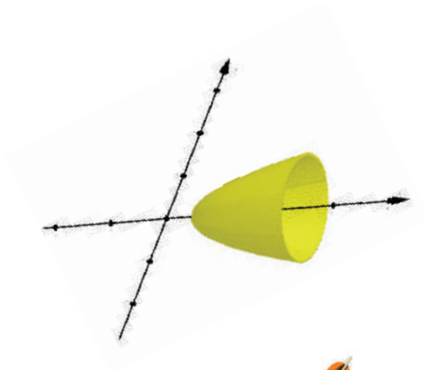
$$= \pi\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Bigg|_1^5 = \pi\left[\left(\frac{1}{2}(5)^2 - 5\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 - 1\right)\right]$$

$$= \pi\left[\left(\frac{25}{2} - 5\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$= \pi\left[\frac{15}{2} + \frac{1}{2}\right] = 8\pi$$

Gráficamente:





Respuesta

Así, el volumen del solido es 8π.

1598. Hallar el volumen del sólido creado al rotar la región definida por las curvas alrededor del eje y.

$$x = 2\sqrt{y}, \qquad x = 0, \qquad y = 9$$

Resolución

El área será:

$$A(y) = \pi(2\sqrt{y})^2$$

Calculando los parámetros para la integral respecto al eje y, es decir:

$$2\sqrt{y} = 0 \Rightarrow y = 0$$

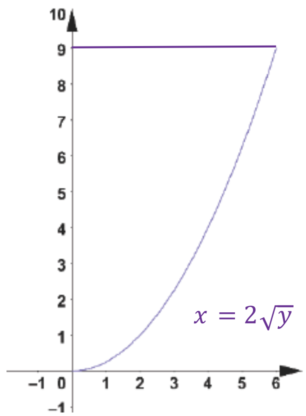
Por tanto, el volumen está definido por:

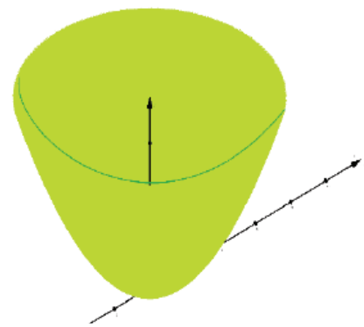
$$V(y) = \int_0^9 A(y)dy \Longrightarrow V(x) = \int_0^9 \pi(2\sqrt{y})^2 dy$$

$$= \pi\int_0^9 4y\, dy = 4\pi\left(\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^9 = 4\pi\left(\frac{1}{2}(9)^2 - \frac{1}{2}(0)^2\right)$$

$$= 2\pi(81) = 162\pi$$

Gráficamente





Respuesta

Por tanto, el volumen del sólido es 162π.

1599. Determinar el volumen del sólido resultante de girar la región comprendida entre las curvas especificadas alrededor de la recta dada.

$$y = x^3, \qquad y = x, \qquad x \geq 0$$

Resolución

Hallando los parámetros respecto al eje x, es decir:

$$y = y \Longrightarrow x^3 = x \Longrightarrow x^3 - x = 0$$

$$\Longrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad o \quad x = 1 \quad o \quad x = -1$$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad o \quad x = 1$$

El área está dada por:

$$A(x) = \pi(x^2 - (x^3)^2) = \pi(x^2 - x^6)$$

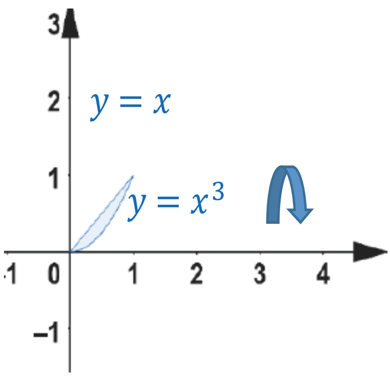
Por tanto, el volumen será:

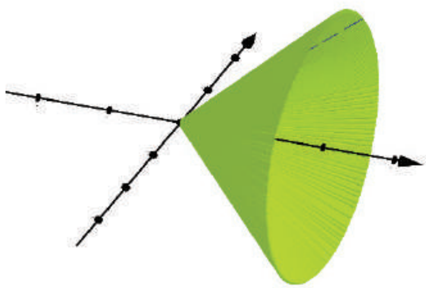
$$V(x) = \int_0^1 A(x)dx \Longrightarrow V(x) = \int_0^1 \pi(x^2 - x^6)dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7}x^7\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left[\left(\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{7}(1)^7\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{7}(0)^7\right)\right]$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = \frac{4}{21}\pi$$

Gráficamente:





Respuesta

El volumen del solido es $\dfrac{4}{21}\pi$.

1600. Obtener el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por las curvas descritas, alrededor del eje $y = 1$.

$$y = x^2, \qquad x = y^2$$

Resolución

Como es desde $y=1$ entonces el radio interior es $1-\sqrt{x}$ y el radio exterior $1-x^2$, por lo que el área está dado por:

$$A(x)=\pi[(1-x^2)^2-(1-\sqrt{x})^2]$$

$$=\pi[1-2x^2+x^4-1+2\sqrt{x}-x]=\pi[x^4-2x^2-x+2\sqrt{x}]$$

Hallar los parámetros respecto al eje x, es decir:

$$y=y\Rightarrow y^2=y^2\Rightarrow x^4=x^2$$

$$\Rightarrow x^4-x^2=0\Rightarrow x^2(x^2-1)=0\Rightarrow x^2(x-1)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=0\quad o\quad x=1\quad o\quad x=-1$$

Solo habrá intersección en: $x=0\quad o\quad x=1$

Se hará el análisis respecto al eje x.
El volumen será:

$$V(x)=\int_0^1 A(x)dx\Rightarrow V(x)=\int_0^1 \pi\left(x^4-2x^2-x+2x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\pi\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\pi\left[\left(\frac{1}{5}\cdot 1^5-\frac{2}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{4}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1}{5}\cdot 0^5-\frac{2}{3}\cdot 0^3-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{4}{3}\cdot 0^{\frac{3}{2}}\right)\right]$$

$$=\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{11}{30}\pi$$

Respuesta

El volumen del solido es $\frac{11}{30}\pi$.

Funciones

1601. Hallar la función inversa de:

$$f(x) = \sqrt{2+3x}$$

Resolución

Se quiere hallar $f^{-1}(x)$, entonces:

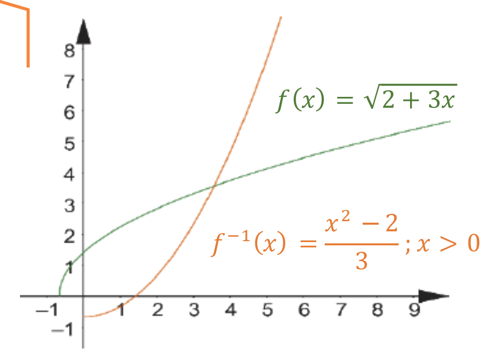
$$f(x) = \sqrt{2+3x} \Rightarrow y = \sqrt{2+3x}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2+3x} \quad //(\ )^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 2+3x$$

$$\Rightarrow \frac{y^2-2}{3} = x$$

Gráficamente:



Así:

$$\Rightarrow y = \frac{x^2-2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2-2}{3}; x > 0$$

Respuesta

La inversa de la función $f(x)$ es: $f^{-1}(x) = \frac{x^2-2}{3}; x > 0$

1602. Encontrar la función inversa de:

$$f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$$

Resolución

Se quiere hallar $f^{-1}(x)$, entonces:

$$f(x) = \frac{4x-1}{2x+3} \Rightarrow y = \frac{4x-1}{2x+3} \Rightarrow y(2x+3) = 4x-1$$

$$\Rightarrow 2xy + 3y = 4x - 1 \Rightarrow 2xy - 4x = -1 - 3y$$

$$\Rightarrow x(2y-4) = -1-3y \Rightarrow x = \frac{-1-3y}{2y-4} = \frac{1+3y}{4-2y}$$

Si:

$$x = \frac{1+3y}{4-2y} \Rightarrow y = \frac{1+3x}{4-2x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{4-2x}$$

Respuesta

Así la función inversa de $f(x)$ es: $f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{4-2x}$

1603. Determinar si la función:

$$f(x) = x^5 + 7$$

es función inyectiva.

Resolución

Es una función inyectiva si: $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$

Sea:

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow a^5 + 7 = b^5 + 7$$

$$\Longrightarrow a^5 = b^5$$

$$\Longrightarrow a = b$$

Respuesta

Por tanto $f(x) = x^5 + 7$ es una función inyectiva.

1604. Establecer si la función:

$$f(x) = e^{5x^3-9}$$

es función inyectiva.

Resolución

Sea:

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow e^{5a^3-9} = e^{5b^3-9}$$

$$\Longrightarrow \ln\left(e^{5a^3-9}\right) = \ln\left(e^{5b^3-9}\right) \Longrightarrow 5a^3 - 9 = 5b^3 - 9$$

$$\Longrightarrow 5a^3 = 5b^3 \Longrightarrow a^3 = b^3 \Longrightarrow a = b$$

Respuesta

De esta manera la función $f(x) = e^{5x^3-9}$ es inyectiva.

1605. Hallar el rango de la función:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Resolución

El rango de una función, es el dominio de la función inversa.

Entonces se debe hallar $f^{-1}(x)$.

Sea:

$$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\Rightarrow y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\Rightarrow 2y=e^{x}-\frac{1}{e^{x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}\Rightarrow 2ye^{x}=e^{2x}-1$$

$$\Rightarrow e^{2x}-2ye^{x}=1\Rightarrow (e^{x})^{2}-2ye^{x}-1=0$$

Usando la formula general se tendrá:

$$e^{x}=\frac{-(-2y)\pm\sqrt{(-2y)^{2}-4(-1)}}{2}\Rightarrow e^{x}=\frac{2y\pm\sqrt{4y^{2}+4}}{2}$$

$$e^{x}=\frac{2y\pm 2\sqrt{y^{2}+1}}{2}\Rightarrow e^{x}=y\pm\sqrt{y^{2}+1}\quad //\ln(\,)$$

$$\Rightarrow \ln(e^{x})=\ln\left(y\pm\sqrt{y^{2}+1}\right)\Rightarrow x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^{2}+1}\right)$$

Para evitar resultados negativos en el logaritmo, se toma solo la parte positiva, es decir:

$$x=\ln\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)\Rightarrow y=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$$

Como la desigualdad:

$$x+\sqrt{x^{2}+1}>0$$

Para cualquier valor $x\in\mathbb{R}$, que me tome, $x+\sqrt{x^{2}+1}$ siempre será mayor que cero, por tanto el rango de $f(x)$ son todos los reales.

Respuesta

Así el rango de $f(x)$ es: $Ran\ f(x)=\{x\in\mathbb{R}\}$

1606. Se sabe que:

$$(g\circ f)(x+2)=2x^{2}-x \text{ y } f(x-1)=x-2$$

Hallar el valor de $g(x)$.

Resolución

Notemos que:

$$(g\circ f)(x+2)=g\big(f(x+2)\big)=2x^{2}-x\qquad (1)$$

Se necesita: $f(x+2)=?$

Sea $f(x-1)=x-2$, hagamos un cambio de variable al término de a evaluar en la función, es decir:

$$f(x-1)=x-2\Rightarrow u=x-1\Rightarrow u+1=x$$

Se reemplaza el valor $x=u+1$ en la función $f(x-1)=x-2$, es decir:

$$f(x-1)=x-2 \Longrightarrow f(u)=(u+1)-2=u-1$$

$$\Longrightarrow f(u)=u-1$$

Evaluemos u para $x+2$ en $f(u)$, es decir $u=x+2$:

$$f(u)=u-1 \Longrightarrow f(x+2)=x+2-1=x+1$$

$$\Longrightarrow f(x+2)=x+1 \qquad (2)$$

Reemplacemos (2) en (1)

$$g\big(f(x+2)\big)=2x^2-x \Longrightarrow g(x+1)=2x^2-x$$

Se quiere hallar $g(x)$, hagamos un cambio de variable, como en la primera parte, es decir:

Sea: $u=x+1 \Longrightarrow u-1=x$

$$g(x+1)=2x^2-x \Longrightarrow g(u)=2(u-1)^2-(u-1)$$

$$\Longrightarrow g(u)=2(u^2-2u+1)-(u-1)$$

$$\Longrightarrow g(u)=2u^2-4u+2-u+1$$

$$\Longrightarrow g(u)=2u^2-5u+3$$

Evaluando en $u=x$ se tendrá:

$$g(u)=2u^2-5u+3 \Longrightarrow g(x)=2x^2-5x+3$$

Respuesta

El valor de $g(x)$ es $2x^2-5x+3$.

1607. Se tiene la función:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & ;3<x \\ x^2-2x-3 & ;1<x\leq 3 \\ x+4 & ;x<1 \end{cases}$$

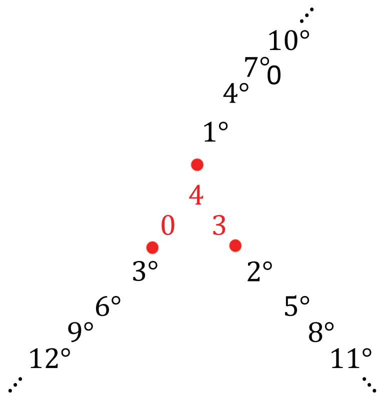
Encuentre $\underbrace{f\Big(f\Big(f\big(f\ \ldots\ldots f(0)\big)\Big)\Big)}_{2028\,-\,veces}$

Resolución

Se tiene como dato la primera función a evaluar que es $f(0)$, en estos casos lo más recomendable es hallar el primer término, luego el segundo y así sucesivamente hasta hallar un patrón.

Para $x=0$ donde $0<1$, pertenece a la función $f(x)=x+4$, asi:

$f(0)=0+4=4 \quad$ *Primer término*



Para $x=4$ donde $3<4$, pertenece a la función $f(x)=x-1$, asi:

$$f(4)=4-1=3 \quad \textit{Segundo término}$$

Para $x=3$ donde $1<3\leq 3$, pertenece a la función $f(3)=x^2-2x-3$, asi:

$$f(3)=(3)^2-2(3)-3=9-6-3$$

$$f(3)=0 \qquad \textit{Tercer término}$$

Si volvemos a evaluar x en 0 el cuarto término será el primer término.
Si volvemos a evaluar x en 4 quinto término será el segundo término.
Si volvemos a evaluar x en 3 sexto término será el tercer término.

Así sucesivamente, nos pide el término 2028 que es múltiplo de 3, o se expresa como: 2028=3·676
Los múltiplos de 3 estan en el tercer término, que es igual a 0 por tanto:

$$\underbrace{f\Big(f\,\Big(f\big(f\;\ldots\ldots.f(0)\big)\Big)\Big)}_{2028-veces}=0$$

Respuesta

Asi: $f\Big(f\,\Big(f\big(f\;\ldots\ldots.f(0)\big)\Big)\Big)=0$

Límites

1608. Demostrar que:

$$\lim_{x\to 0} x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right)=0$$

Resolución

Use el siguiente teorema.
Si $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ cuando x tiende a a (excepto en a) y

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$$

entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$.

Sea:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq 1 \quad //x^4 > 0$$

$$\Rightarrow -x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \leq x^4$$

Evaluando el límite de los extremos cuando x tiende a 0 se tiene:

$$\lim_{x \to 0} -x^4 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} x^4 = 0$$

Respuesta

Así: $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right)\right) = 0$

1609. Encontrar el límite dado por:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

Resolución

Usando la aproximación lineal de la exponencial, se tendrá:

$$\lim_{x \to 0} e^x = 1 + x \Rightarrow \lim_{x \to 0} e^x - 1 = x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} e^{2x} - 1 = 2x$$

Respuesta

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = \lim_{x \to 0} 2 = 2$$

1610. Hallar el valor del límite trigonométrico:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Resolución

Se usará la definición de: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$

Así:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (\cos x)^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\text{sen}\,x)^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,x}{x}\right)\cdot\left(\frac{\text{sen}\,x}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+\cos x} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{1+\cos 0}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Respuesta

El valor del límite trigonométrico es $\frac{1}{2}$.

1611. Encuentre el valor del límite trigonométrico:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$$

Resolución

Sea:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^2}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(\text{sen}\,x)^2}{x(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}\cdot\frac{\text{sen}\,x}{1+\cos x} = 1\cdot\frac{\text{sen}\,0}{1+\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Respuesta

El valor del límite es 0.

1612. Determinar el valor del límite trigonométrico:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,6x}{\text{sen}\,3x}$$

Resolución

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,6x}{\text{sen}\,3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,6x}{\text{sen}\,3x}\cdot\frac{\frac{6x}{6x}}{\frac{3x}{3x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\text{sen}\,6x}{6x}}{\frac{\text{sen}\,3x}{3x}}\cdot\frac{6x}{3x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} 6x}{6x}}{\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} \cdot 2 = \frac{1}{1} \cdot 2 = 2$$

Respuesta

Así el valor es 2.

1613. Se sabe que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - 13}{x - 1} = 10$$

Hallar el valor de: $\lim_{x\to 1} f(x)$

Resolución

Por propiedades de límites:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - 13}{x - 1} = 10 \Longrightarrow \frac{\lim_{x\to 1}(f(x) - 13)}{\lim_{x\to 1}(x - 1)} = 10$$

$$\Longrightarrow \frac{\lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} 13}{\lim_{x\to 1}(x - 1)} = 10 \Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} 13 = 10 \lim_{x\to 1}(x - 1)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 10 \cdot 0 + \lim_{x\to 1} 13 = 0 + 13 = 13$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 13$$

Respuesta

El valor de $\lim_{x\to 1} f(x)$ es 13.

1614. Existe un número tal que:

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

Si es así, encuentre el valor de a y el valor del límite.

Resolución

Si existe un valor a tal que exista el límite, entonces $3x^2 + ax + a + 3$ tiene que ser divisible entre $x^2 + x - 2$. Por tanto:

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

Sea $P(x) = 3x^2 + ax + a + 3$ hay que evaluarlo en $x = -2$, entonces:

$$P(x) = 3x^2 + ax + a + 3 \Longrightarrow P(-2) = 3(-2)^2 + a(-2) + a + 3$$

$$\Longrightarrow 0 = 12 - 2a + a + 3$$

$$\Longrightarrow 0 = 15 - a$$

$$\Longrightarrow a = 15 \qquad (1)$$

Reemplazando el valor de $a = 15$ en $P(x) = 3x^2 + ax + a + 3$ se tendrá:

$$P(15) = 3x^2 + 15x + 15 + 3 = 3x^2 + 15x + 18 = 3(x+2)(x+3)$$

Evaluando en el límite original para $a = 15$ se tendrá:

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2} \Longrightarrow \lim_{x \to -2} \frac{3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3(x+3)}{x-1} = \frac{3(-2+3)}{-2-1} = -\frac{3}{3} = -1$$

Respuesta

Por tanto, existe un valor $a = 15$ tal que existe el límite y es -1.

Continuidad

1615. Encontrar las asíntotas verticales y asíntotas horizontales de la función dada por

$$y = \frac{5 + 4x}{x + 3}$$

Resolución

Si existe un número a tal que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

La recta $x = a$ es la asíntota vertical.

$$y = \frac{5+4x}{x+3} \Longrightarrow \lim_{x \to a} \frac{5+4x}{x+3} = \infty \Longrightarrow \lim_{x \to -3} \frac{5+4x}{x+3} = \frac{17}{0} = \infty$$

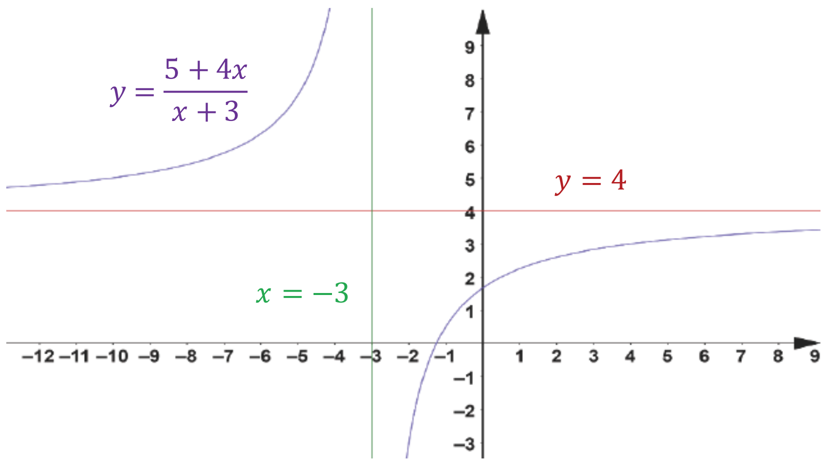
por tanto, tiene una asíntota vertical en la recta $x = -3$

Si existe $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ la recta $y = b$ es una asíntota horizontal.

$$y = \frac{5+4x}{x+3} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{5+4x}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+4x}{x+3} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}+\frac{4x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}+4}{1+\frac{3}{x}} = \frac{0+4}{1+0} = 4$$

Por tanto, tiene una asíntota horizontal en la recta $y = 4$.
Gráficamente se vería así:



Respuesta
Así, tiene una asíntota vertical en la recta $x = -3$ y tiene una asíntota horizontal en recta $y = 4$

1616. Determinar si existen asíntotas verticales y horizontales de la función:

$$y = \frac{2\,e^x}{e^x - 5}$$

Resolución

Sea:

$$y = \frac{2\,e^x}{e^x-5} \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{2\,e^x}{e^x-5} = \infty \Longrightarrow e^x - 5 = 0 \Longrightarrow e^x = 5 \Longrightarrow \ln e^x = \ln 5$$

$$\Longrightarrow x = \ln 5$$

Si $\lim\limits_{x\to\ln 5} \frac{2e^x}{e^x-5} = \infty$ tiene una asíntota vertical en $x = \ln 5$.

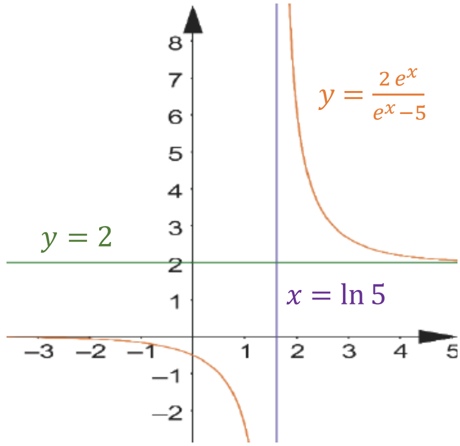
Sea:

$$y = \frac{2\,e^x}{e^x - 5} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2\,e^x}{e^x - 5}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\,e^x}{e^x - 5} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} - \frac{5}{e^x}}$$

$$= \frac{2}{1 - 0} = 2$$



Por tanto tiene una asíntota horizontal en $y = 2$

Respuesta

La asíntota vertical es $x = \ln 5$ y la asíntota horizontal es $y = 2$.

1617. Demostrar que el límite es cierto, por definición.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x - 1}{x + 2} = 2$$

Resolución

Para probarlo se debe aplicar:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M : x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Sea

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x - 1}{x + 2} = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M\!: \; x > M \Longrightarrow \left|\frac{2x - 1}{x + 2} - 2\right| < \varepsilon$$

Hay que hallar un M que esté en función de ε, es decir:

$$\left|\frac{2x - 1}{x + 2} - 2\right| = \left|\frac{2x - 1 - 2(x + 2)}{x + 2}\right| = \left|\frac{2x - 1 - 2x - 4}{x + 2}\right| = \left|\frac{-5}{x + 2}\right|$$

$$= \frac{|-5|}{|x + 2|} = \frac{5}{|x + 2|} < \varepsilon$$

Si:

$$\frac{5}{|x+2|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \frac{|x+2|}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \frac{x+2}{5} \qquad \text{pues} \quad \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\varepsilon} < x+2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\varepsilon} - 2 < x$$

$$\Rightarrow x > \frac{5-2\varepsilon}{\varepsilon} = M$$

Respuesta

$M = \frac{5-2\varepsilon}{\varepsilon}$ lo que asegura la existencia del límite.

1618. Demostrar, por definición, la existencia del límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{x^2} = 3$$

Resolución

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{x^2} = 3 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M\ tal\ que\ x > M \Rightarrow \left|\frac{3x^2+2}{x^2} - 3\right| < \varepsilon$$

Nota: El valor de M debe estar en función de épsilon, no debe haber alguna variable x, ni alguna función.

$$\Rightarrow \left|\frac{3x^2+}{x^2} + \frac{2}{x^2} - 3\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2}{x^2}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(\sqrt{2})^2}{x^2}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{2})^2}{x^2} < \varepsilon \qquad \text{por propiedad } |x|^2 = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\varepsilon} < x^2$$

$$\Rightarrow M = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} < x$$

Respuesta

Para $M = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$ el límite existe.

1619. Hallar la ecuación de la recta tangente en la curva dada por:

$$y = 4x - 3x^2$$

en el punto (2,-4).

Resolución

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por el punto dado, con pendiente:

$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Para el punto (2,-4), evaluamos en la función $y = 4x - 3x^2$ tal que:

$$a = 2 \text{ y } f(2) = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = -4$$

Sea:

$$m = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Longrightarrow m = \lim_{x\to 2} \frac{4x - 3x^2 - (-4)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-(3x^2 - 4x - 4)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{-(3x^2 - 4x - 4)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)(3x+2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2} -(3x + 2) = -(3 \cdot 2 + 2) = -8$$

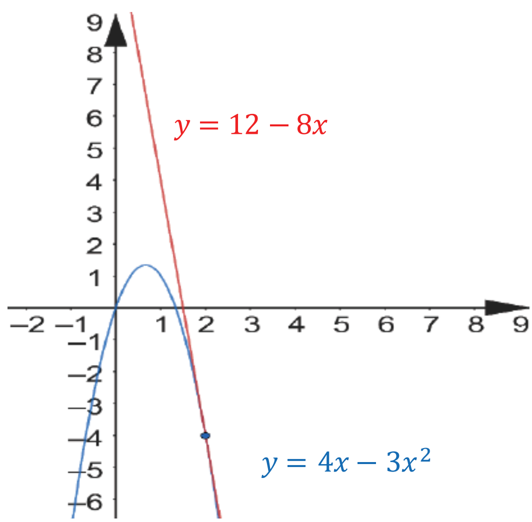
Se tiene el punto (2,-4) y la pendiente $m = -8$, que al reemplazarlo en la ecuación de la recta tangente:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Longrightarrow y - (-4) = -8(x - 2)$$

$$\Longrightarrow y + 4 = -8x + 16$$

$$\Longrightarrow y = 12 - 8x$$

Gráficamente



Respuesta

Así la ecuación de la recta tangente es: $y = 12 - 8x$

1620. Encontrar la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto:

$$y = \frac{2x+1}{x+2}, \qquad (1,1)$$

Resolución

Para el punto (1,1) evaluamos en la función $y = \frac{2x+1}{x+2}$ tal que:

$$a = 1 \text{ y } f(1) = \frac{2+1}{1+2} = 1$$

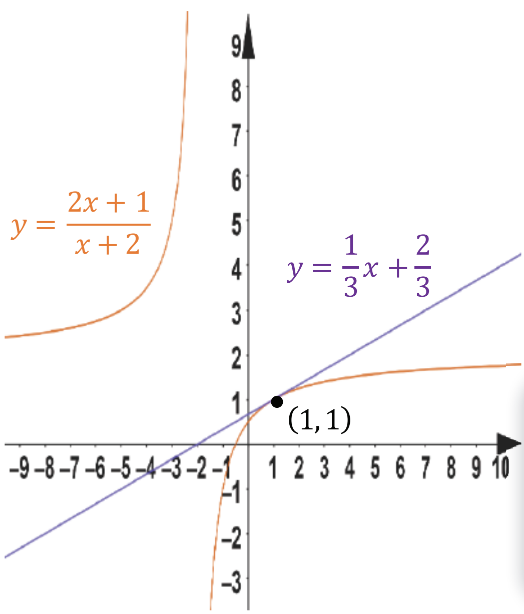
Sea:

$$m = \lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \Rightarrow m = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x+1}{x+2} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x+1-x-2}{x+2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x+2}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}$$

Se tiene el punto (1,1) y la pendiente $m = \frac{1}{3}$, reemplazar en la ecuación de la recta tangente, es decir:

Gráficamente



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x-1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Respuesta

Así la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto (1,1) es:

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

1621. Determinar la ecuación de la recta tangente en el punto $(1,1)$ y la función:

$$y = \sqrt{x}$$

Resolución

Otra interpretación de la pendiente es:

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Sea:

$$f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

Si $x = 1$ entonces:

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Longrightarrow m = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-(\sqrt{x})^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \quad ;\ \text{pues } x = 1$$

Se tiene $m = \dfrac{1}{2}$ y el punto $(1,1)$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

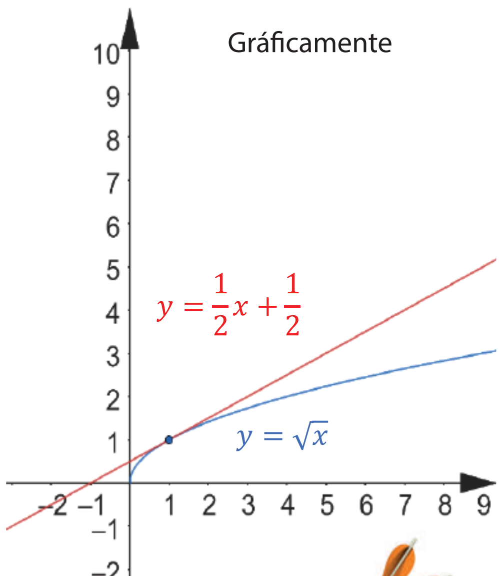
$$\Longrightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$\Longrightarrow y - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1$$

$$\Longrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Gráficamente



Respuesta

La ecuación de la recta tangente es: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

La derivada

1622. Obtener la derivada de la siguiente función:

$$F(x) = (7x^7 - 5x^5)^3$$

Resolución

Se sabe, de la regla de la cadena, que si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$ entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f\big(g(x)\big)$ es derivable en x y F' esta dado por:

Nota: No se debe confundir con la notación ya que:

$$(f \circ g)(x) \neq f(x) \cdot g(x)$$

Pues $(f \circ g)(x)$ es la composición de funciones, mientras que $f(x) \cdot g(x)$ es el producto de funciones.

Sea:

$$F(x) = (7x^7 - 5x^5)^3$$

$$\Rightarrow F'(x) = \left((7x^7 - 5x^5)^3\right)' \cdot (7x^7 - 5x^5)'$$

$$= 3(7x^7 - 5x^5)^2 \cdot (7 \cdot 7x^6 - 5 \cdot 5x^4)$$

$$= 3(7x^7 - 5x^5)^2 \cdot (49x^6 - 25x^4)$$

Respuesta

El resultado es: $F(x) = 3(7x^7 - 5x^5)^2 \cdot (49x^6 - 25x^4)$

1623. Localizar la deriva de la función dada por:

$$g(a) = \left(\frac{a^3 - 1}{a^3 + 1}\right)^8$$

Resolución

Sea:

$$g(a) = \left(\frac{a^3 - 1}{a^3 + 1}\right)^8 \Rightarrow g'(a) = \left(\left(\frac{a^3 - 1}{a^3 + 1}\right)^8\right)' \cdot \left(\frac{a^3 - 1}{a^3 + 1}\right)'$$

$$= 8\left(\frac{a^3 - 1}{a^3 + 1}\right)^7 \cdot \left(\frac{(a^3 - 1)'(a^3 + 1) - (a^3 - 1)(a^3 + 1)'}{(a^3 + 1)^2}\right)$$

$$= 8\left(\frac{a^3 - 1}{a^3 + 1}\right)^7 \cdot \left(\frac{3a^2(a^3 + 1) - 3a^2(a^3 - 1)}{(a^3 + 1)^2}\right)$$

$$= 8\left(\frac{a^3-1}{a^3+1}\right)^7 \cdot \left(\frac{3a^2(a^3+1-a^3+1)}{(a^3+1)^2}\right) = 8\frac{(a^3-1)^7}{(a^3+1)^7} \cdot \left(\frac{3a^2(2)}{(a^3+1)^2}\right)$$

$$= 48a^2\frac{(a^3-1)^7}{(a^3+1)^9}$$

Respuesta

Por tanto, la derivada es: $48a^2\dfrac{(a^3-1)^7}{(a^3+1)^9}$

1624. Hallar la deriva trigonométrica dada por:

$$f(x) = \tan(\sec(\cos^2 x))$$

Resolución

Si:

$$f(x) = \tan(\sec(\cos^2 x)) \Rightarrow f'(x) = (\tan(\sec(\cos^2 x)))'(\sec(\cos^2 x))'$$

$$= \sec^2(\sec(\cos^2 x)) \cdot (\sec(\cos^2 x)) \cdot (\tan(\cos^2 x)) \cdot \sec\big((\cos^2 x)\big)(\cos^2 x)$$
$$\cdot (\cos^2 x)' \cdot (\cos^2 x)'$$

$$= \sec^2(\sec(\cos^2 x)) \cdot (\sec(\cos^2 x)) \cdot (\tan(\cos^2 x)) \cdot 2(\cos x) \cdot (\cos x)'$$

$$= \sec^2(\sec(\cos^2 x)) \cdot (\sec(\cos^2 x)) \cdot (\tan(\cos^2 x)) \cdot 2(\cos x) \cdot (-\operatorname{sen} x)$$

$$= -2 \cdot \sec^2(\sec(\cos^2 x)) \cdot (\sec(\cos^2 x)) \cdot (\tan(\cos^2 x)) \cdot (\cos x) \cdot (\operatorname{sen} x)$$

Respuesta

Así, la derivada de $f(x)$ es:

$-2 \cdot \sec^2(\sec(\cos^2 x)) \cdot (\sec(\cos^2 x)) \cdot (\tan(\cos^2 x)) \cdot (\cos x) \cdot (\operatorname{sen} x)$

1625. Mediante derivación implícita, encontrar $\dfrac{dy}{dx}$.

$$x^4 + x^2y^2 + y^3 = 5$$

Resolución

La notación de Leibniz nos dice que se la composición de funciones se puede expresar como:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Sea:

$$x^4+x^2y^2+y^3=5 \Longrightarrow \frac{d}{dx}(x^4+x^2y^2+y^3)=\frac{d}{dx}5$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}x^4+\frac{d}{dx}(x^2y^2)+\frac{d}{dx}y^3=\frac{d}{dx}5$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}x^4+\frac{d}{dx}x^2y^2+x^2\frac{d}{dx}y^2+\frac{d}{dx}y^3=\frac{d}{dx}5$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}x^4+\frac{d}{dx}x^2y^2+x^2\frac{d}{dy}\frac{dy}{dx}y^2+\frac{d}{dy}\frac{dy}{dx}y^3=\frac{d}{dx}5$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}x^4+\frac{d}{dx}x^2y^2+x^2\frac{d}{dy}y^2\frac{dy}{dx}+\frac{d}{dy}y^3\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}5$$

$$\Longrightarrow 4x^3+2xy^2+x^22yy'+3y^2y'=0$$

$$\Longrightarrow y'(2x^2y+3y^2)=-(4x^3+2xy^2)$$

$$\Longrightarrow y'=-\frac{(4x^3+2xy^2)}{(2x^2y+3y^2)}=-\frac{2x(2x^2+y^2)}{y(2x^2+3y)}$$

$$\Longrightarrow y'=-\frac{2x(2x^2+y^2)}{y(2x^2+3y)}$$

Respuesta

Por derivación implícita, el resultado es: $-\dfrac{2x(2x^2+y^2)}{y(2x^2+3y)}$

1626. Sea la curva con ecuación $y^2=5x^4-x^2$, encontrar la ecuación de la recta tangente a esta curva, en el punto (1,2).

Resolución

Sea:

$$y^2=5x^4-x^2 \Longrightarrow \frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}(5x^4-x^2)$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dy}y^2\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}5x^4-\frac{d}{dx}x^2 \Longrightarrow 2yy'=20x^3-2x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{20x^3 - 2x}{2y}$$

Se tiene el punto $(1,2)$, $x = 1$ y $y = 2$, evaluando en y' es decir:

$$y' = \frac{20x^3 - 2x}{2y} \Rightarrow y' = \frac{20(1)^3 - 2(1)}{2(2)} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{9}{2}$$

Se tiene el punto (1,2) y la pendiente $m = \frac{9}{2}$, evaluando en la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{9}{2}(x - 1) = \frac{9}{2}x - \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{9}{2}x - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$$

Respuesta

La ecuación de la recta tangente a la curva es: $y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$

1627. Encuentre y' en la función dada por:

$$y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$$

Resolución

La deriva del logaritmo es: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Sea:

$$y = \frac{\ln x}{1 + \ln x} \Rightarrow y' = \frac{(\ln x)'(1 + \ln x) - (\ln x)(1 + \ln x)'}{(1 + \ln x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(1 + \ln x) - (\ln x)\left(0 + \frac{1}{x}\right)}{(1 + \ln x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x}{x}}{(1 + \ln x)^2} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{(1 + \ln x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{x(1+\ln x)^2}$$

Respuesta

Así, la derivada es: $\dfrac{1}{x(1+\ln x)^2}$

1628. Determinar la deriva de la función dada por:

$$f(x) = \ln\ln\ln x$$

Resolución

Sea:

$$f(x) = \ln\ln\ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln\ln x}\cdot(\ln\ln x)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

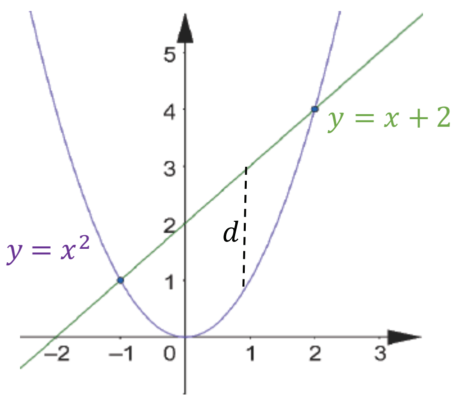
Respuesta

La solución es: $f'(x) = \dfrac{1}{\ln\ln x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}$

Aplicaciones de la derivada

1629. Determinar la distancia vertical máxima entre la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$ para $-1 \le x \le 2$.

Resolución



Se quiere ver cuando la distancia de d será máxima, entonces se la define como:

$$d(x) = (x+2) - (x^2)$$

para $-1 \le x \le 2$

Usando el criterio de calcular máximos con los puntos críticos y el intervalo definido se tendrá:

$$d'(x) = 0 \Longrightarrow (x+2)' - (x^2)' = 0$$

$$\Longrightarrow 1 - 2x = 0 \Longrightarrow 1 = 2x \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Se tienen los puntos $x = -1, x = 2$ y $x = \frac{1}{2}$ evaluando en la función de la distancia dada por $d(x) = (x+2) - (x^2)$.

Para $x = -1$ en $d(x) = x + 2 - x^2$:

$$d(-1) = (-1) + 2 - (-1)^2 = 0$$

Para $x = 2$ en $d(x) = x + 2 - x^2$:

$$d(2) = (2) + 2 - (2)^2 = 0$$

Para $x = \frac{1}{2}$ en $d(x) = x + 2 - x^2$:

$$d\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{4} = \frac{2+8-1}{4} = \frac{9}{4}$$

Respuesta

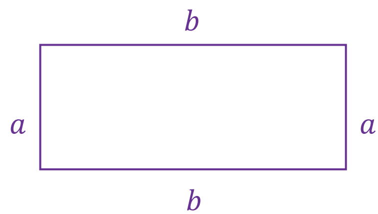
Tendrá una máximo en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ y la distancia máxima será $\frac{9}{4}$.

1630. Encontrar las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 100 metros, donde el área sea tan grande como sea posible.

Resolución

Si el perímetro es 100, entonces:

$$P = 2a + 2b \Longrightarrow 100 = 2a + 2b$$
$$\Longrightarrow 50 = a + b$$
$$\Longrightarrow 50 - b = a$$



El área de un rectángulo es:

$$A = ba \Longrightarrow A(b) = b(50 - b)$$
$$\Longrightarrow A(b) = 50b - b^2 \text{ donde } 0 < b < 50$$

Derivemos la función $A(b)$ para encontrar los máximos.

$$A(b) = 50b - b^2 \Longrightarrow A'(b) = 0$$

$$\Longrightarrow 50 - 2b = 0 \Longrightarrow 50 = 2b \Longrightarrow 25 = b$$

Por tanto, tendrá un máximo en $b = 25$:

$$A(b) = 50b - b^2 \Longrightarrow A(25) = 50(25) - (25)^2 = 1250 - 625$$

$$\Longrightarrow A(25) = 625$$

Como tendrá un máximo en $b = 25$, entonces:

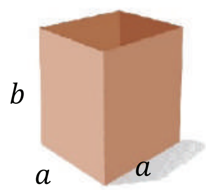
$$50 - b = a \Longrightarrow 50 - 25 = a \Longrightarrow 25 = a$$

Respuesta

Las dimensiones será $a = 25$ y $b = 25$ para un área máxima.

1631. Si se tiene de $1200\ \mathrm{cm}^2$ de material para hacer una caja con una base cuadra sin tapa. Determinar el volumen máximo posible de la caja.

Resolución



Si desarmamos la caja se tendrá una base, que es cuadrada y las paredes que dependerían de la base y la altura de la caja, por tanto, se tiene:

$$1200 = a^2 + 4ab$$

$$\Longrightarrow 1200 - a^2 = 4ab$$

$$\Longrightarrow \frac{1200 - a^2}{4a} = b$$

El área de la caja está dada por:

$$A = a^2 b \Longrightarrow A(a) = a^2\left(\frac{1200 - a^2}{4a}\right) = a\left(\frac{1200 - a^2}{4}\right)$$

$$= a\left(\frac{1200}{4} - \frac{a^2}{4}\right) = a\left(300 - \frac{a^2}{4}\right) = 300a - \frac{a^3}{4}$$

Usando el criterio de la derivada para hallar los máximos en $A(a)$:

$$A(a) = 300a - \frac{a^3}{4} \Longrightarrow A'(a) = 0$$

$$\Longrightarrow 300 - \frac{3a^2}{4} = 0 \Longrightarrow 300 = \frac{3a^2}{4} \Longrightarrow 300 \cdot 4 = 3a^2$$

$$\Longrightarrow \frac{300 \cdot 4}{3} = a^2 \Longrightarrow 400 = a^2 \Longrightarrow \pm\sqrt{400} = a$$

$$\Longrightarrow +\sqrt{400} = a \qquad a \text{ es una media positiva}$$

$$\Longrightarrow 20 = a$$

Para $a = 20$ evaluando en $A(a) = 300a - \frac{a^3}{4}$:

$$A(20) = 300(20) - \frac{(20)^3}{4} = 6000 - 2000 = 4000$$

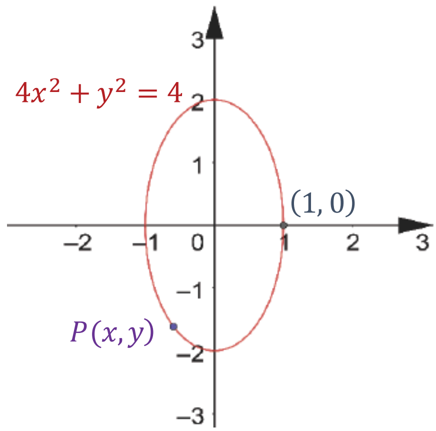
Respuesta

Así el área máxima de la caja sin tapa es $4000\ \text{cm}^3$.

1632. Hallar los puntos sobre la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que están más lejos del punto $(1{,}0)$.

Resolución

Gráficamente



Si:

$$4x^2 + y^2 = 4 \Longrightarrow y^2 = 4 - 4x^2 \quad (1)$$

Se quiere hallar la distancia máxima de los puntos (x, y) al punto $(1{,}0)$, por la definición de distancia entre dos puntos:

$$D = d^2 = (x-1)^2 + (y-0)^2$$

$$D = x^2 - 2x + 1 + y^2 \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$D = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$\Longrightarrow D = x^2 - 2x + 1 + 4 - 4x^2 = -3x^2 - 2x + 5$$

Con el criterio de la derivada para hallar los máximos se tendrá:

$$D = -3x^2 - 2x + 5 \Longrightarrow D' = 0$$

$$\Longrightarrow -6x - 2 = 0 \Longrightarrow -2 = 6x \Longrightarrow -\frac{1}{3} = x$$

De la gráfica se ve que la elipse esta entre $-1 < x < 1$ ven los valores del eje x, por tanto, para hallar los máximos se debe evaluar de la siguiente manera:

Para $x = -1$

$$D(-1) = -3(-1)^2 - 2(-1) + 5 = -3 + 2 + 5 = 4$$

Para $x = 1$

$$D(1) = -3(1)^2 - 2(1) + 5 = -3 - 2 + 5 = 0$$

Para $x = -\frac{1}{3}$

$$D\left(-\frac{1}{3}\right)=-3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2\left(-\frac{1}{3}\right)+5=\frac{16}{3}$$

Por tanto, tendrá un máximo en $D\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3}$ es decir en $x=-\frac{1}{3}$

Reemplazando en (1) se tendrá:

$$y^2=4-4x^2 \Longrightarrow y=\pm\sqrt{4-4x^2}$$

$$\Longrightarrow y=\pm\sqrt{4-4\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{32}{9}}=\pm\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

Respuesta

La distancia máxima se da con los puntos. $\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$

1633. Determinar la antiderivada de la función:

$$f(x)=2x^3-\frac{2}{3}x^2+5x$$

Resolución

Una manera ingeniosa de calcular la antiderivada de x^n es:

$$f(x)=x^n,\text{para } n\neq\{0,-1\}\Longrightarrow F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\text{ donde } C \text{ es constante}$$

Sea:

$$f(x)=2x^3-\frac{2}{3}x^2+5x\Longrightarrow F(x)=\frac{2x^{3+1}}{3+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}+5\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1}+C$$

$$\Longrightarrow F(x)=\frac{2x^4}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+5\cdot\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^4}{2}-\frac{2}{9}x^3+\frac{5}{2}x^2+C$$

Respuesta

La antiderivada es: $F(x)=\frac{x^4}{2}-\frac{2}{9}x^3+\frac{5}{2}x^2+C$

1634. Hallar la antiderivada de la función dada por:

$$g(x)=\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt{x}$$

Resolución

Sea

$$g(x)=\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt{x}=x^{\frac{2}{3}}+x\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{3}{2}}$$

Así:

$$G(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

Respuesta

Así la antiderivada es: $G(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$

1635. Encontrar la antiderivada de:

$$h(x) = 1 + 3\operatorname{sen} x + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Resolución

$$h(x) = 1 + 3\operatorname{sen} x + \frac{3}{\sqrt{x}} = 1 + 3\operatorname{sen} x + 3x^{-\frac{1}{2}}$$

Así:

$$H(x) = x + 3(-\cos x) + \frac{3x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = x - 3\cos x + \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$H(x) = x - 3\cos x + 6x^{\frac{1}{2}} = x - 3\cos x + 6\sqrt{x}$$

Respuesta

Así la antiderivada es: $H(x) = x - 3\cos x + 6\sqrt{x}$

La integral

1636. Determinar la integral definida por: $\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}\, dx$

Resolución

Se hace un cambio de variables, teniendo en cuenta que es una integral defina, es decir:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}\, dx \Longrightarrow \begin{cases} u = 1 + 7x \\ du = 7dx \Longrightarrow \frac{1}{7}du = dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ en } u = 1 + 7x \Rightarrow u = 1 + 7(1) = 8 \\ x = 0 \text{ en } u = 1 + 7x \Rightarrow u = 1 + 7(0) = 1 \end{cases} \text{Nuevos parámetros}$$

Reemplazando el cambio de variables y analizando en los nuevos parámetros:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x}\, dx = \int_1^8 u^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{7} du = \frac{1}{7}\left(\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_1^8$$

$$= \frac{1}{7}\left(\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_1^8 = \frac{3}{28}\left(u^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_1^8 = \frac{3}{28}\left(8^{\frac{4}{3}} - 1^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3}{28}(16 - 1)$$

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x}\, dx = \frac{3}{28}(15) = \frac{45}{28}$$

Respuesta

El resultado es $\frac{45}{28}$.

1637. Hallar la integral definida:

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^2}\, dy$$

Resolución

Sea:

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^2}\, dy \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{y} \\ du = -\dfrac{1}{y^2} dy \Rightarrow -y^2 du = dy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2 \text{ en } u = \dfrac{1}{y} \Rightarrow u = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \text{ en } u = \dfrac{1}{y} \Rightarrow u = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

Analizando:

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^2}\, dy = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{e^u}{y^2}(-y^2) du = -\int_1^{\frac{1}{2}} e^u du$$

$$= -e^{u}\Big|_{1}^{\frac{1}{2}} = -\left(e^{\frac{1}{2}} - e^{1}\right) = e - \sqrt{e}$$

Respuesta

La integral es: $e - \sqrt{e}$

1638. Determinar el valor de la integral definida:

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dx$$

Resolución

Sea:

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{\pi}{2}t \\ du = \dfrac{\pi}{2}dt \Rightarrow \dfrac{2}{\pi}du = dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Para } x = 1 \text{ en } u = \dfrac{\pi}{2}t \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{Para } x = 0 \text{ en } u = \dfrac{\pi}{2}t \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

Así se tiene:

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \cdot \frac{2}{\pi}dt = \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0\right)$$

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dx = \frac{2}{\pi}(1-0) = \frac{2}{\pi}$$

Respuesta

Así el valor es: $\dfrac{2}{\pi}$

1639. Evaluar la integral, utilizando integración por partes.

$$\int x \cos 5x \, dx$$

Resolución

La definición de integración por partes dice:

Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

Sea:

$$\int x\cos 5x\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u = x \Longrightarrow du = 1\,dx \\ dv = \cos 5x\,dx \Longleftarrow v = \dfrac{1}{5}\operatorname{sen}(5x) \end{cases}$$

Evaluando en la integral se tiene:

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos 5x\,dx}_{v'} = \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x)}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x)}_{v}\,dx$$

$$= x\cdot\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{5}\int \operatorname{sen}(5x)\,dx$$

$$= x\cdot\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{5}\right)(-\cos(5x))\right) + C$$

$$= x\cdot\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + C$$

Respuesta

El resultado es: $x\cdot\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{25}\cos(5x) + C$

1640. Use integración por partes para calcular el valor de la integral:

$$\int (x^2+2x)\cos x\,dx$$

Resolución

Analizando se tendrá:

$$\int (x^2+2x)\cos x\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u = x^2+2x \Longrightarrow du = 2x+2\,dx \\ dv = \cos x\,dx \Longleftarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Así:

$$\int (x^2+2x)\cos x\,dx = (x^2+2x)\operatorname{sen} x - \underbrace{\int (2x+2)\operatorname{sen} x\,dx}_{(\spadesuit)}$$

Analizando (♠) se tiene:

$$\int (2x+2)\operatorname{sen} x\,dx \Longrightarrow \begin{cases} U = 2x+2 \Longrightarrow dU = 2\,dx \\ dV = \operatorname{sen} x\,dx \Longleftarrow V = -\cos x \end{cases}$$

Luego:

$$\int (2x+2)\operatorname{sen} x\,dx = -(2x+2)\cos x - \int 2(-\cos x)dx$$

$$= -(2x+2)\cos x + 2\int \cos x\,dx$$

$$= -(2x+2)\cos x + 2\operatorname{sen} x - C$$

Retomando el ejercicio:

$$\int (x^2+2x)\cos x\,dx = (x^2+2x)\operatorname{sen} x - \int (2x+2)\operatorname{sen} x\,dx$$

$$= (x^2+2x)\operatorname{sen} x - (-(2x+2)\cos x + 2\operatorname{sen} x - C)$$

$$= (x^2+2x)\operatorname{sen} x + (2x+2)\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$$

Respuesta

Por tanto, la integral es: $(x^2+2x)\operatorname{sen} x + (2x+2)\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$

1641. Descubrir la integral definida por:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^7\theta\cos^5\theta\,d\theta$$

Resolución

Analizando la integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^7\theta\cos^5\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^7 y\theta\cdot\cos^4\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^7\theta\cdot(\cos^2\theta)^2\cdot\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^7\theta\cdot(1-\operatorname{sen}^2 x)^2\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^7\theta\cdot(1-\operatorname{sen}^2\theta)^2\cdot\cos\theta\,d\theta \Longrightarrow \begin{cases} u = \operatorname{sen}\theta \\ du = \cos\theta\,d\theta \Longrightarrow \dfrac{1}{\cos\theta}du = d\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Para } \theta = \dfrac{\pi}{2} \text{ en } \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \theta = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \\ \text{Para } \theta = 0 \text{ en } \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \theta = \operatorname{sen} 0 = 0 \end{cases}$$

Así se tendrá:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^7\theta \cdot (1-\operatorname{sen}^2\theta)^2 \cdot \cos\theta\, d\theta = \int_0^1 u^7(1-u^2)^2 \cdot \cos\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta} du$$

$$= \int_0^1 u^7(1-u^2)^2 du = \int_0^1 u^7(1-2u^2+u^4) du$$

$$= \int_0^1 (u^7 - 2u^9 + u^{11})\, du = \left(\frac{u^8}{8} - 2\frac{u^{10}}{10} + \frac{u^{12}}{12}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{u^8}{8} - \frac{u^{10}}{5} + \frac{u^{12}}{12}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{1^8}{8} - \frac{0^8}{8}\right) - \left(\frac{1^{10}}{5} - \frac{0^{10}}{5}\right) + \left(\frac{1^{12}}{12} - \frac{0^{12}}{12}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{15-24+10}{120} = \frac{1}{120}$$

Respuesta

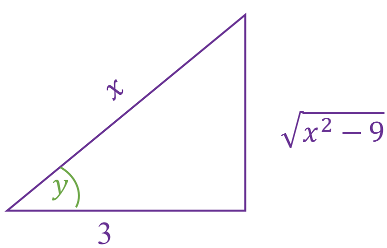
El resultado es $\dfrac{1}{120}$.

1642. Resolver la integral trigonométrica:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3} dx$$

Resolución

Se interpreta gráficamente:



$$\Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \qquad \cos y = \frac{3}{x}$$

$$\tan y = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$$

Si:

$$\operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$$

$$\Rightarrow x \operatorname{sen} y = \sqrt{x^2-9} \qquad (1)$$

$$\tan y = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3} \Rightarrow 3\tan y = \sqrt{x^2-9} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$3\tan y = x\,\text{sen}\,y \Rightarrow 3\frac{\text{sen}\,y}{\cos y} = x\,\text{sen}\,y \Rightarrow 3\sec y = x$$

$$x = 3\sec y \Rightarrow dx = 3\sec y\tan y\,dy$$

Si:

$$\tan y = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3} \Rightarrow 3\tan y = \sqrt{x^2-9}$$

Analizando con los datos obtenidos:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx = \int \frac{3\tan y}{(3\sec y)^3}3\sec y\tan y\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\tan^2 y}{\sec^2 y}dy = \frac{1}{3}\int \text{sen}^2\,y\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2}(1-\cos 2y)\,dy$$

$$= \frac{1}{6}y - \frac{1}{12}\text{sen}\,2y + C = \frac{1}{6}\left(\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \frac{1}{6}\text{sen}\,y\cos y + C$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\cdot\frac{3}{x} + C$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x^2} + C$$

Respuesta

Así, la integral equivale a: $\frac{1}{6}\left(\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x^2} + C$

1643. Evalúe la integral dada por:

$$\int \frac{x^4}{x-1}dx$$

Resolución

Se analiza la función, por el algoritmo de la división. Si se divide x^4 entre $x-1$ se tendrá:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)Q(x) + r$$

donde $Q(x)$ es el cociente y r es el resto o residuo:

$$x^4 = (x-1)(x^3+x^2+x+1)+1 \Longrightarrow \frac{x^4}{x-1} = x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x-1}$$

Así:

$$\int \frac{x^4}{x-1}dx = \int \left(x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \int x^3dx + \int x^2dx + \int xdx + \int 1dx + \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)+C$$

Respuesta

La integral resulta: $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)+C$

1644. Determinar el valor de la integral dada por:

$$\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)}dx$$

Resolución

Analizando la función por fracciones parciales se tendrá:

$$\frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1}$$

$$= \frac{A(x-1)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-1)} = \frac{Ax-A+2Bx+B}{(2x+1)(x-1)} = \frac{Ax+2Bx-A+B}{(2x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{(A+2B)x-A+B}{(2x+1)(x-1)}$$

Así se tiene:

$$\frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)} = \frac{(A+2B)x-A+B}{(2x+1)(x-1)}$$

$$\Longrightarrow 5x+1 = (A+2B)x+(-A+B)$$

Igualando términos, se tendrá el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + 2B = 5 \\ -A + B = 1 \end{cases} \Longrightarrow 3B = 6 \Longrightarrow B = 2$$

Reemplazando B:

$$A + 2B = 5 \Longrightarrow A = 5 - 2B = 5 - 2(2) = 1$$

$$\Longrightarrow A = 1$$

Por tanto:

$$\frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{1}{2x+1} + \frac{2}{x-1}$$

En la integral se tendrá:

$$\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)} = \int \left(\frac{1}{2x+1} + \frac{2}{x-1} \right) dx$$

$$= \int \frac{1}{2x+1}\, dx + \int \frac{2}{x-1}\, dx = \frac{1}{2}\ln(2x+1) + 2\ln(x-1) + C$$

Respuesta

Así el resultado es: $\frac{1}{2}\ln(2x+1) + 2\ln(x-1) + C$

1645. Determinar el valor de la integral definida:

$$\int_3^4 \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2x^2}\, dx$$

Resolución

Analizando la función:

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2x^2} = \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^2(x-2)}$$

Por el algoritmo de la división, se tiene:

$$x^3 - 2x^2 - 4 = \big(x^2(x-2)\big)(1) - 4 \Longrightarrow \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^2(x-2)} = 1 - \frac{4}{x^2(x-2)}$$

Se debe hacer un análisis sobre:

$$\frac{-4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2}{x^2(x-2)}$$

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2}{x^2(x-2)} = \frac{Ax^2 + Cx^2 - 2Ax + Bx - 2B}{x^2(x-2)}$$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (-2A+B)x - 2B}{x^2(x-2)}$$

Así se tiene:

$$\frac{-4}{x^2(x-2)} = \frac{(A+C)x^2 + (-2A+B)x - 2B}{x^2(x-2)}$$

$$\Longrightarrow -4 = (A+C)x^2 + (-2A+B)x - 2B$$

Igualando términos:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -2A + B = 0 \\ -2B = -4 \end{cases}$$

De la tercera ecuación se tiene:

$$-2B = -4 \Longrightarrow B = 2$$

Reemplazando B en la segunda ecuación:

$$-2A + B = 0 \Longrightarrow B = 2A \Longrightarrow 2 = 2A \Longrightarrow A = 1$$

Reemplazando A en la primera ecuación:

$$A + C = 0 \Longrightarrow C = -A \Longrightarrow C = -1$$

Se tiene que:

$$A = 1, B = 2 \text{ y } C = -1$$

Por tanto:

$$\frac{-4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x-2}$$

Así, para la integral, se tiene:

$$\int_3^4 \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2x^2}\, dx = \int_3^4 \left(1 + \frac{-4}{x^2(x-2)}\right) dx$$

$$= \int_3^4 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x-2}\right) dx = \left(x + \ln x - \frac{2}{x} - \ln(x-2)\right)\Bigg|_3^4$$

$$= \left(4 + \ln 4 - \frac{2}{4} - \ln(4-2)\right) - \left(3 + \ln 3 - \frac{2}{3} - \ln(3-2)\right)$$

$$= \left(4 + \ln 4 - \frac{1}{2} - \ln 2\right) - \left(3 + \ln 3 - \frac{2}{3} - \ln 1\right)$$

$$= \left(\frac{7}{2} + \ln 2\right) - \left(\frac{7}{3} + \ln 3\right) = \frac{7}{6} + \ln\frac{2}{3}$$

Respuesta

El valor de la integral definida es: $\frac{7}{6} + \ln\frac{2}{3}$

Aplicaciones de la integral

1646. Aplique el método de los cascarones cilíndricos para encontrar el volumen de los sólidos generados al rotar, alrededor del eje x, la región acotada por las curvas especificadas.

$$y = \sqrt[3]{x}, \qquad y = 0, \qquad x = 1$$

Resolución

El volumen de un sólido se puede encontrar mediante:

$$V(x) = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx \quad \text{donde} \quad 0 \le a < b$$

Encontremos los parámetros respecto al eje x:

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{x} \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = y \Longrightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

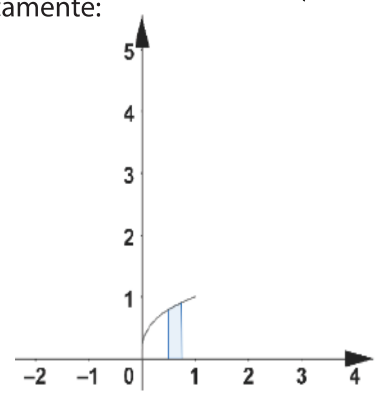
Para calcular el volumen se tendrá:

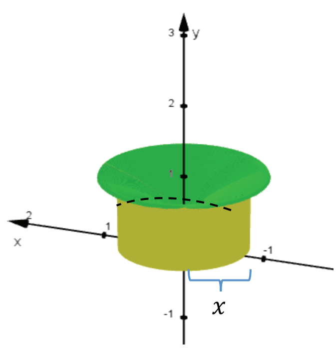
$$V(x) = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx \Longrightarrow V(x) = \int_0^1 2\pi x(\sqrt[3]{x} - 0)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x \cdot x^{\frac{1}{3}}\, dx = 2\pi \int_0^1 x^{\frac{4}{3}}\, dx = 2\pi\left(\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{3}{7}(1)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{7}(0)^{\frac{7}{3}}\right) = \frac{6}{7}\pi$$

Gráficamente:





Respuesta

El resultado es $\frac{6}{7}\pi$.

1647. Determinar el volumen del sólido formado al girar alrededor del eje x la región delimitada por las curvas dadas, utilizando el método de los cascarones cilíndricos.

$$y = e^{-x^2}, \qquad y = 0, \qquad x = 0, \qquad x = 1$$

Resolución

Para el volumen se tiene:

$$V(x) = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx \Longrightarrow V(x) = \int_0^1 2\pi x\left(e^{-x^2} - 0\right) dx = 2\pi \int_0^1 x e^{-x^2}\, dx$$

$$2\pi \int_0^1 x e^{-x^2}\, dx \Longrightarrow \begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x\, dx \Longrightarrow dx = \dfrac{1}{2x}\, du \end{cases}$$

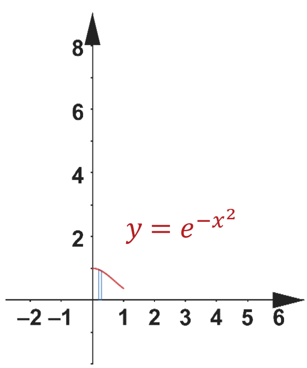
$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Para } x = 1 \text{ en } u = x^2 \ \Longrightarrow u = 1 \\ \text{Para } x = 0 \text{ en } u = x^2 \ \Longrightarrow u = 0 \end{cases}$$

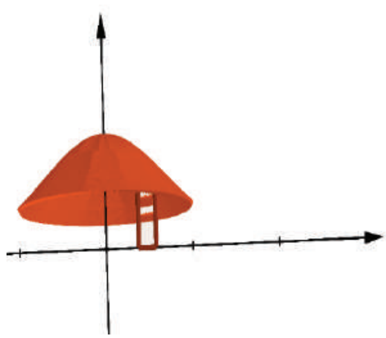
Luego:

$$2\pi \int_0^1 x e^{-x^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 x e^{-u} \frac{1}{2x}\, du = \pi \int_0^1 e^{-u}\, du$$

$$= \pi\left(-e^{-u} - (-e^{-u})\right)\Big|_0^1 = \pi\left(-e^{-1} - (-e^{-0})\right)$$

$$= \pi\left(-\frac{1}{e} + 1\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$





Respuesta

Así el volumen es: $\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$

1648. Utilizando el método de cascarones cilíndricos, determine el volumen de los sólidos producidos al girar, alrededor del eje x, la región que limitan las curvas dadas.

$$y = x^2, \qquad y = 6x - 2x^2$$

Resolución

Determinar los parámetros respecto al eje x, es decir:

$$y = y \Longrightarrow x^2 = 6x - 2x^2 \Longrightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad o \quad x = 2$$

En la integral se tendrá:

$$V(x) = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx \Longrightarrow V(x) = \int_0^2 2\pi x(6x - 2x^2 - x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 x(6x - 3x^2)\, dx = 2\pi \int_0^2 (6x^2 - 3x^3)\, dx$$

$$= 2\pi\left[\left(2(2)^3 - \tfrac{3}{4}(2)^4\right) - \left(2(0)^3 - \tfrac{3}{4}(0)^4\right)\right]$$

$$= 2\pi(16 - 12) = 8\pi$$

Respuesta

El volumen es: 8π.

1649. Utilizando los cascarones cilíndricos, calcule el volumen de los sólidos obtenidos al hacer girar, alrededor del eje y, la región definida por las curvas.

$$xy = 1, \qquad x = 0, \qquad y = 1, \qquad y = 3$$

Resolución

Despejando x en la función:

$$xy = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{y}$$

Como se tiene los parámetros respecto al eje y, con $y = 1$, $y = 3$ el volumen será:

$$V(y) = \int_a^b 2\pi x f(y)\, dy \Longrightarrow V(y) = \int_1^3 2\pi y\left(\frac{1}{y} - 0\right) dy$$

$$= 2\pi \int_1^3 dy = 2\pi(3-1) = 4\pi$$

Respuesta

El volumen es: 4π

1650. Encontrar el volumen de los sólidos resultantes de la región entre las curvas proporcionadas, mediante el método de los cascarones cilíndricos.

$y = x^4$, $y = 0$, $x = 1$ alrededor de $x = 2$

Resolución

Tiene un radio de $2 - x$, una circunferencia de $2\pi(2 - x)$, por tanto, se tiene:

$$V(x) = \int_a^b 2\pi(2-x)f(x)\, dx \Longrightarrow V(x) = \int_0^1 2\pi(2-x)x^4\, dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 (2x^4 - x^5)dx = 2\pi\left(\frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{6}\right) = 2\pi\left(\frac{7}{30}\right) = \frac{7}{15}\pi$$

Respuesta

El volumen es: $\frac{7}{15}\pi$

Funciones

1651. Sea la función $f(x)=\dfrac{x+5}{x+3}$, hallar el valor de: $\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$

a) $\dfrac{1}{x+3}$ b) $\dfrac{1}{x-3}$ c) $\dfrac{1}{3(x-3)}$ d) $\dfrac{1}{3(x+3)}$

Resolución

Se sabe el valor de $f(x)$. Evaluemos $x=3$ en $f(x)$:

$$f(x)=\frac{x+5}{x+3}\Longrightarrow f(3)=\frac{3+5}{3+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Reemplazando

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{\frac{x+5}{x+3}-\frac{4}{3}}{x-3}=\frac{\frac{3(x+5)-4(x+3)}{3(x+3)}}{x-3}=\frac{\frac{3x+15-4x-12}{3(x+3)}}{x-3}$$

$$=\frac{\frac{3-x}{3(x+3)}}{x-3}=\frac{3-x}{3(x+3)(x-3)}=\frac{-(x-3)}{3(x+3)(x-3)}=-\frac{1}{3(x+3)}$$

Así:

Respuesta: $-\dfrac{1}{3(x+3)}$

1652. Hallar el dominio de la función:

$$h(t)=\sqrt{4-t}+\sqrt{6+t}$$

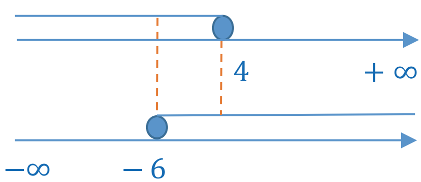
a) $(-6,4)$ b) $(-6,4]$ c) $[-6,4)$ d) $[-6,4]$

Resolución

La función $h(t)$ tiene dos restricciónes:

$\sqrt{4-t}\geq 0\Longrightarrow 4-t\geq 0\Longrightarrow 4\geq t$

$\sqrt{6+t}\geq 0\Longrightarrow 6+t\geq 0\Longrightarrow t\geq -6$



La intersección será el conjunto solución donde está bien definido el dominio de $h(t)$, es decir: $C_s:[-6,4]$

$$Dom\ h=\{t\in\mathbb{R},-6\leq t\leq 4\}$$

Respuesta: $[-6,4]$

1653. El área de un rectángulo es $16\ \mathrm{m}^2$. Exprese el perímetro del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

a) $P(b) = \dfrac{32 + 2b^2}{b};\ \ b < 0$ b) $P(b) = \dfrac{32 + 2b^2}{b};\ \ b > 0$

c) $P(b) = \dfrac{32 + 2b^2}{b};\ \ b \geq 0$ d) $P(b) = \dfrac{32 + 2b^2}{b};\ \ b \leq 0$

Resolución

Si el área del rectángulo es $16\ \mathrm{m}^2$ entonces:

$$A = ab \Longrightarrow 16 = ab \Longrightarrow \frac{16}{b} = a \quad (1)$$

El perímetro del rectángulo es:

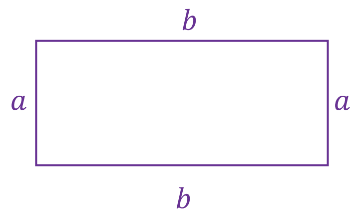
$$P = 2a + 2b \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$P = 2a + 2b \Longrightarrow P = 2\left(\frac{16}{b}\right) + 2b$$

$$\Longrightarrow P = \frac{32}{b} + 2b = \frac{32 + 2b^2}{b}$$

$$\Longrightarrow P(b) = \frac{32 + 2b^2}{b};\ \ b > 0$$



Cada uno de sus lados tiene que ser mayor que cero, en caso contrario no habría área ni perímetro, por tanto:

$$a > 0 \text{ y } b > 0$$

Respuesta: $P(b) = \dfrac{32 + 2b^2}{b};\ \ b > 0$

1654. Determinar si la siguiente función es una función par o impar.

$$f(x) = \frac{x^4}{x^6 + 7}$$

a) $f(x)$ es par b) $f(x)$ es impar c) $f(x)$ es par e impar d) Ninguna

Resolución

Según las definiciones de función par o impar, solo es necesario evaluar x por $-x$ y ver el resultado:

$$f(x) = \frac{x^4}{x^6 + 7} \Longrightarrow f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^6 + 7} = \frac{x^4}{x^6 + 7} = f(x)$$

$$\Longrightarrow f(-x) = f(x)$$

Así $f(x)$ es una función par.

Respuesta: $f(x)$ es par

1655. Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 - 4 \text{ y } g(x) = 1 - 6x$$

¿Se dará la igualdad: $f \circ g = g \circ f$?

a) No cumple la igualdad b) Si se cumple la igualdad

Resolución

Sea:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \Longrightarrow f(1-6x) = (1-6x)^2 - 4$$
$$= 1 - 12x + 36x^2 - 4 = 36x^2 - 12x - 3$$
$$\Longrightarrow (f \circ g)(x) = 36x^2 - 12x - 3$$
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \Longrightarrow g(x^2 - 4) = 1 - 6(x^2 - 4)$$
$$= 1 - 6x^2 + 24 = 25 - 6x^2$$
$$\Longrightarrow (g \circ f)(x) = 25 - 6x^2$$

Luego:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Respuesta: No se cumple la igualdad

1656. Sea la función compuesta:

$$(g \circ f)(x-5) = 3x^2 - 7 \text{ y } f(x+2) = x - 1$$

Hallar el valor de $g(x)$.

a) $2x^2 - 32x + 121$ b) $2x^2 + 32x + 121$

c) $2x^2 + 32x - 121$ d) $2x^2 - 32x - 121$

Resolución

Notemos que: $(g \circ f)(x-5) = g\big(f(x-5)\big) = 3x^2 - 7 \quad (1)$

Sea: $f(x+2) = x - 1$, hagamos un cambio de variable:

$$f(x+2) = x - 1 \Longrightarrow u = x + 2 \Longrightarrow u - 2 = x$$
$$f(x+2) = x - 1 \Longrightarrow f(u) = u - 2 - 1 = u - 3$$
$$\Longrightarrow f(u) = u - 3$$

Evaluemos u para $x - 5$ en $f(u)$, es decir $u = x - 5$:

$$f(u) = u - 3 \Longrightarrow f(x-5) = x - 5 - 3 = x - 8$$
$$\Longrightarrow f(x-5) = x - 8 \qquad (2)$$

Reemplacemos (2) en (1)

$$g\big(f(x-5)\big) = 3x^2 - 7 \Longrightarrow g(x-8) = 3x^2 - 7$$

Con un cambio de variable, como en la primera parte:

Sea: $u = x - 8 \Longrightarrow u + 8 = x$

$$g(x-8) = 3x^2 - 7 \Longrightarrow g(u) = 3(u+8)^2 - 7$$
$$\Longrightarrow g(u) = 2(u^2 + 16u + 64) - 7$$
$$\Longrightarrow g(u) = 2u^2 + 32u + 128 - 7$$
$$\Longrightarrow g(u) = 2u^2 + 32u + 121$$

Evaluando en $u = x$ se tendrá:

$$g(u) = 2u^2 + 32u + 121 \Longrightarrow g(x) = 2x^2 + 32x + 121$$

Respuesta: $g(x) = 2x^2 + 32x + 121$

1657. Se tiene la función:

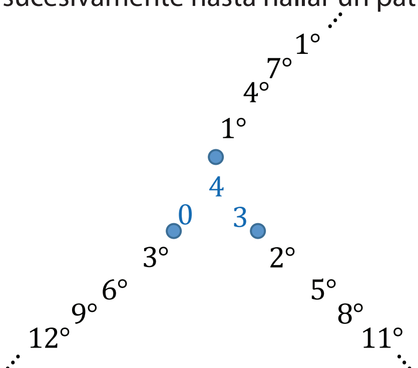
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & ; 3 < x \\ x^2 - 2x - 3 & ; 1 < x \leq 3 \\ x + 4 & ; x < 1 \end{cases}$$

Encuentre $\underbrace{f\Big(f\Big(f\big(f \dots \dots f(0)\big)\Big)\Big)}_{2025 - veces}$

a) 0 b) 3 c) 4 d) Ninguna

Resolución

Se tiene como dato la primera función a evaluar que es $f(0)$, en estos casos lo más recomendable es hallar el primer término, luego el segundo y así sucesivamente hasta hallar un patrón.



Para $x = 0$ con $0 < 1$ en $f(x) = x + 4$, así:

$$f(0) = 0 + 4 = 4 \quad \textit{Primer término}$$

Para $x = 4$ con $3 < 4$, en $f(x) = x - 1$, así:

$$f(4) = 4 - 1 = 3 \quad \textit{Segundo término}$$

Para $x = 3$ con $1 < 3 \leq 3$ en $f(3) = x^2 - 2x - 3$, así:

$f(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3$

$f(3) = 0 \quad Tercer\ término$

Si volvemos a evaluar x en 0 el cuarto término será el primer término, si volvemos a evaluar x en 4 el quinto término será el segundo término, si volvemos a evaluar x en 3 el sexto término será el tercer término, así sucesivamente.

Nos pide el término 2025 el cual es múltiplo de 3:

$$2025=3\cdot 675$$

Los múltiplos de 3 estan en el tercer término, por lo que:

$$f\left(f\left(f\left(f\ldots\ldots f(0)\right)\right)\right) = 0;\ 2025 - veces$$

Respuesta: 0

Límites

1658. Determinar δ al demostrar:

$$\lim_{x \to -2a} (2a - 3x) = 8a$$

a) $\dfrac{\varepsilon}{3}$ b) $\dfrac{\varepsilon}{3+a}$ c) $\dfrac{\varepsilon}{3-a}$ d) $Ninguna$

Resolución

Sea:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que: si } |x - (-2a)| < \delta \Longrightarrow |2a - 3x - 8a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que: si } |x - (-2a)| < \delta \Longrightarrow |-3x - 6a| < \varepsilon$$

Se quiere llegar a:

$$|-3x - 6a| = |-3(x + 2a)| = 3|x + 2a|$$

Se sabe que:

$$|x - (-2a)| < \delta \Longrightarrow |x + 2a| < \delta$$

$$\Longrightarrow 3|x + 2a| < 3\delta = \varepsilon$$

$$\Longrightarrow 3\delta = \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

Respuesta: $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$

1659. Calcular el valor del límite:

$$\lim_{x\to a^2} \frac{x-a^2}{\sqrt{x}-a}$$

a) 2 b) a c) $2a$ d) $2a+x$

Resolución

Sea:

$$\lim_{x\to a^2} \frac{x-a^2}{\sqrt{x}-a} = \lim_{x\to a^2} \frac{x-a^2}{\sqrt{x}-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}+a} = \lim_{x\to a^2} \frac{(x-a^2)(\sqrt{x}+a)}{(\sqrt{x})^2-a^2}$$

$$= \lim_{x\to a^2} \frac{(x-a^2)(\sqrt{x}+a)}{x-a^2} = \lim_{x\to a^2}(\sqrt{x}+a) = \sqrt{a^2}+a$$

$$= a+a = 2a$$

Respuesta: $2a$

1660. Sea la función:

$$g(x) = \frac{x^2+x-6}{|x-2|}$$

¿Existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 2?

a) $L=0$ b) $L=-5$ c) $L=5$ d) *No existe límite*

Resolución

Se define $|x-2|$ tal que:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x-2\geq 0 \\ -(x-2) & x-2<0 \end{cases} \Rightarrow |x-2| = \begin{cases} x-2 & x\geq 2 \\ -(x-2) & x<2 \end{cases}$$

Para que exista el límite, los límites laterales deben ser iguales.
Sea $x\geq 2$ entonces:

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x^2+x-6}{|x-2|}\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x^2+x-6}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2^+}(x+3) = 2+3 = 5$$

Sea $x<2$ entonces:

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x^2+x-6}{|x-2|}\right) = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x^2+x-6}{-(x-2)}\right) = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{(x+3)(x-2)}{-(x-2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2^-} -(x+3) = -(2+3) = -5$$

No existe el límite pues:

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x^2+x-6}{|x-2|}\right) \neq \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x^2+x-6}{|x-2|}\right)$$

Respuesta: *No existe límite*

1661. Determinar si el siguiente límite existe.

$$L=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4x+4}{x^4-3x^2-4}\right)$$

a) $L=0$ b) $L=-3$ c) $L=3$ d) *No existe límite*

Resolución

Evaluando el límite, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, por tanto, hay que desarrollar la expresiones.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4x+4}{x^4-3x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)^2}{(x^2-4)(x^2+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)(x^2+1)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)}{(x+2)(x^2+1)}\right)$$

$$=\frac{(2-2)}{(2+2)(2^2+1)}=\frac{0}{20}=0$$

Respuesta: 0

1662. Hallar el límite de:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(3+x)^{-1}-3^{-1}}{x}\right)$$

a) $L=0$ b) $L=-3^{-1}$ c) $L=-9^{-1}$ d) *Ninguno*

Resolución

Se debe levantar la indeterminación:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(3+x)^{-1}-3^{-1}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{(3+x)}-\frac{1}{3}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{3-(3+x)}{3(3+x)}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{3-3-x}{3(3+x)}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{-x}{3(3+x)}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-x}{3x(3+x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3(3+x)}\right) = -\frac{1}{3(3+0)} = -\frac{1}{9} = -9^{-1}$$

Respuesta: -9^{-1}

1663. Encontrar el valor del límite trigonométrico:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cotan(\pi x)\cdot \operatorname{sen} x}{2\sec x}$$

a) $L=\dfrac{1}{\pi}$ b) $L=\dfrac{1}{2\pi}$ c) $L=\dfrac{1}{3\pi}$ d) *Ninguno*

Resolución

Sea:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cotan(\pi x)\cdot \operatorname{sen} x}{2\sec x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(\pi x)}{\operatorname{sen}(\pi x)}\cdot \operatorname{sen} x}{\frac{2}{\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(\pi x)\cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(\pi x)}}{\frac{2}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\pi x)\cdot \operatorname{sen} x\cdot \cos x}{2\operatorname{sen}(\pi x)}\cdot\frac{\frac{1}{\pi x}}{\frac{1}{\pi x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\cos(\pi x)\cdot\cos x}{\pi}}{2\,\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}}$$

$$= \frac{1\cdot\frac{\cos 0\cdot\cos 0}{\pi}}{2\cdot 1} = \frac{\frac{1\cdot 1}{\pi}}{2\cdot 1} = \frac{1}{2\pi}$$

Respuesta: $\dfrac{1}{2\pi}$

1664. Se sabe que:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-3}{5} = 2$$

Hallar $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

a) 5 b) 7 c) 10 d) 13

Resolución

Por las propiedades de límites:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-3}{5}=2\Rightarrow\frac{\lim\limits_{x\to 3}(f(x)-3)}{\lim\limits_{x\to 3}5}=2\Rightarrow\lim_{x\to 3}f(x)-\lim_{x\to 3}3=2\lim_{x\to 3}5$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 3}f(x)-3=2\cdot 5=10$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 3}f(x)=10+3=13$$

Respuesta: 13

Continuidad

1665. Con la definición de continuidad, determinar si la siguiente función es continua:

$$f(x)=\frac{x^2+5x}{2x+3}\ ;a=2$$

a) $f(x)$ es continua b) $f(x)$ no es continua

Resolución

Una función f es continua en un número a si:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

Calculando $\lim\limits_{x\to a}f(x)$:

$$\lim_{x\to 2}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+5x}{2x+3}\right)=\frac{2^2+5\cdot 2}{2\cdot 2+3}=\frac{14}{7}=2\qquad(1)$$

Evaluando $f(x)$ en $x=2$:

$$f(x)=\frac{x^2+5x}{2x+3}\Rightarrow f(2)=\frac{2^2+5\cdot 2}{2\cdot 2+3}=\frac{14}{7}=2\qquad(2)$$

Se observa que (1) y (2) son iguales, es decir:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+5x}{2x+3}\right)=f(2)$$

Así $f(x)$ es continua en $a=2$.

Respuesta: $f(x)$ es continua

1666. Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} a+bx & ;x<1 \\ 4 & ;x=1 \\ b-ax & ;x>1 \end{cases}$$

Si $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ ¿cuáles son los posibles valores de a y b para que la función $f(x)$ sea continua?

a) $a=0, b=4$ b) $a=4, b=0$ c) $a=0, b=2$ d) $a=2, b=0$

Resolución

Una función f es continua en un número a si:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Por hipótesis se sabe que: $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

Si f es continua los límites laterales son iguales:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \Longrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1^+}(b-ax)=4$$

$$\Longrightarrow b-a\cdot 1=4 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1^-}(a+bx)=4$$

$$\Longrightarrow a+b\cdot 1=4 \qquad (2)$$

Así, se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -a+b=4 \\ a+b=4 \end{cases} \Longrightarrow 2b=8 \Longrightarrow b=4 \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (1)

$$a=b-4 \Longrightarrow a=4-4=0$$

$$\Longrightarrow a=0$$

Respuesta: $a=0, b=4$

1667. Sea f una función con dominio en los reales, ¿puede f ser escrita como suma de dos funciónes, $f = g + h$ con g función par y h función impar?

a) *Verdadero* b) *Falso*

Resolución

Sea f:

$$f(x) = \frac{2f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(x) + 0}{2} = \frac{f(x) + f(x) + f(-x) - f(-x)}{2}$$

$$= \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{h(x)}$$

Si:

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2}$$

$$= \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x)$$

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2}$$

$$= -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$$

Así $f = g + h$, donde g función par y h función impar

Respuesta: *Verdadero*

1668. Identificar el valor del límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right)$$

a) $a - b$ b) $\frac{a-b}{2}$ c) $\frac{a+b}{2}$ d) *Ninguno*

Resolución

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}}{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+ax}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+bx}\right)^2}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax-(x^2+bx)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax-x^2-bx}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax-bx}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{ax}{x}-\frac{bx}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{ax}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{bx}{x^2}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}}\right)$$

$$= \frac{a-b}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{a-b}{2}$$

Respuesta: $\frac{a-b}{2}$

1669. Hallar el límite dado por:

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{4050y+\operatorname{sen}2y}{2y+\cos 2y}\right)$$

a) 2023 b) 2024 c) 2025 d) 2026

Resolución

Sea:

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{4050y+\operatorname{sen}2y}{2y+\cos 2y}\right)=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{4050y+\operatorname{sen}2y}{2y+\cos 2y}\cdot\frac{\frac{1}{2y}}{\frac{1}{2y}}\right)$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{\frac{4050y}{2y}+\frac{\operatorname{sen}2y}{2y}}{\frac{2y}{2y}+\frac{\cos 2y}{2y}}\right)=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{2025+\frac{\operatorname{sen}2y}{2y}}{1+\frac{\cos 2y}{2y}}\right)$$

$$= \frac{2025+0}{1+0}=2025$$

Respuesta: 2025

1670. Determinar las asíntotas verticales y asíntotas horizontales de la función:

$$y=\frac{1+x^4}{x^2-x^4}$$

a) $x=1, y=-1$
b) $x=-1, y=-1$
c) $x=1, y=1$
d) $x=\pm 1, y=-1$

Resolución

La recta $x=a$ es la asíntota vertical.

$$y=\frac{1+x^4}{x^2-x^4} \Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{1+x^4}{x^2-x^4}=\nexists \Longrightarrow x^2-x^4=0 \Longrightarrow x=\pm 1$$

Por tanto tiene dos asíntotas verticales en la recta $x=\pm 1$
Sea:

$$y=\frac{1+x^4}{x^2-x^4} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^4}{x^2-x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^4}{x^2-x^4}\cdot\frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^4}+\frac{x^4}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}-\frac{x^4}{x^4}}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

Por tanto tiene una asíntota horizontal en la recta $y=-1$

Respuesta: $x=\pm 1, y=-1$

1671. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$y=x^3-3x+1$$

en el punto (2,3).

a) $y=3x-5$ b) $y=5x-3$ c) $y=9x-15$ d) $y=15x-9$

Resolución

Evaluando (2,3), en la función $y=x^3-3x+1$:

$$a=2 \text{ y } f(2)=x^3-3x+1=(2)^3-3\cdot 2+1=3$$

Ahora:

$$m=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Longrightarrow m=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x+1-3}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2(x-2)}{x-2}=(2+1)^2=9$$

Se tiene el punto $(2, 3)$ y la pendiente $m = 9$, luego:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 9(x - 2)$$
$$\Rightarrow y = 9x - 18 + 3$$
$$\Rightarrow y = 9x - 15$$

Respuesta: $y = 9x - 15$

La derivada

1672. Con la definición de límite, hallar la derivada de la función:

$$f(t) = t^3 - 3t + 5$$

a) $3t^2 - 1$ b) $3t^2$ c) $3t^2 + 3$ d) $3t^2 - 3$

Resolución

Sea:

$$f(t) = t^3 - 3t + 5 \Rightarrow f(t + h) = (t + h)^3 - 3(t + h) + 5$$
$$= t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3 - 3t - 3h + 5$$
$$= t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3 - 3t - 3h + 5$$

Si:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3 - 3t - 3h + 5 - (t^3 - 3t + 5)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{t^3 + 3t^2h + 3th^2 + h^3 - 3t - 3h + 5 - t^3 + 3t - 5}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3t^2h + 3th^2 + h^3 - 3h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(3t^2 + 3th + h^2 - 3)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} (3t^2 + 3th + h^2 - 3) = 3t^2 + 3t \cdot 0 + 0^2 - 3 = 3t^2 - 3$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3t^2 - 3$$

Respuesta: $3t^2 - 3$

1673. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto (0,2)

$$y = 2e^x + x$$

a) $y = 3x$ b) $y = 2$ c) $y = 3x - 2$ d) $y = 3x + 2$

Resolución

Sea:

$$m = y' \Longrightarrow m = (2e^x + x)' = 2(e^x)' + x' = 2e^x + 1$$
$$\Longrightarrow m = 2e^x + 1$$

Si el punto es $(0, 2)$ con $x = 0$:

$$m = f'(x) = 2e^x + 1 \Longrightarrow f'(0) = 2e^0 + 1 = 2 + 1 = 3$$
$$\Longrightarrow m = 3$$

Se tiene el punto $(0, 2)$, la pendiente $m = 3$ luego:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Longrightarrow y - 2 = 3(x - 0)$$
$$\Longrightarrow y = 3x + 2$$

Respuesta: $y = 3x + 2$

1674. Determinar la ecuación de la recta tangente que es perpendicular a la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ en el punto $x = 1$.

a) $y = \frac{31}{5} - \frac{1}{5}x$ b) $y = -\frac{31}{5} - \frac{1}{5}x$ c) $y = \frac{31}{5} + \frac{1}{5}x$ d) $Ninguna$

Resolución

Evaluando $x = 1$ en $f(x)$:

$$f(1) = 1^2 + 3(1) + 2 = 6 \Longrightarrow y = 6 \text{ y } x = 1$$

Hallar la derivada y evaluar en $x = 1$:

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \Longrightarrow m = f'(x) = 2x + 3 + 0$$
$$\Longrightarrow m = 2(1) + 3 = 5$$

La pendiente perpendicular es de la forma $-\frac{1}{m}$, en el punto $(1, 6)$ se tendrá:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1) \Longrightarrow y - 6 = -\frac{1}{5}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y-6=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}x \Rightarrow y=\frac{1}{5}+6-\frac{1}{5}x$$

$$\Rightarrow y=\frac{31}{5}-\frac{1}{5}x$$

Respuesta: $y=\frac{31}{5}-\frac{1}{5}x$

1675. Determinar $f'(x)$ y $f''(x)$ de la función:

$$f(x)=(x^4+1)e^x$$

a) $(x^4+4x^3)e^x$; $(x^4+8x^3+12x^2)e^x$
b) $(x^4+4x^3+1)e^x$; $(x^4+4x^3+8x^2+1)e^x$
c) $(x^4+4x^3+1)e^x$; $(x^4+8x^3+12x^2+1)e^x$
d) $(x^4+8x^3+1)e^x$; $(x^4+x^3+12x^2+1)e^x$

Resolución

Si:

$$f(x)=(x^4+1)e^x \Rightarrow f'(x)=(x^4+1)'e^x+(x^4+1)(e^x)'$$

$$=4x^3e^x+(x^4+1)e^x=(4x^3+x^4+1)e^x$$

Si $f'(x)=(4x^3+x^4+1)e^x$ entonces:

$$f'(x)=(4x^3+x^4+1)e^x$$

$$f''(x)=(4x^3+x^4+1)'e^x+(4x^3+x^4+1)(e^x)'$$

$$=(12x^2+4x^3)e^x+(4x^3+x^4+1)(e^x)$$

$$=(12x^2+4x^3+4x^3+x^4+1)e^x$$

$$=(x^4+8x^3+12x^2+1)e^x$$

Respuesta: $(x^4+4x^3+1)e^x$ y $(x^4+8x^3+12x^2+1)e^x$

1676. Encontrar la derivada trigonométrica:

$$f(x) = x\cos x + 2\tan x$$

a) $\operatorname{sen} x - x\cos x + 2\sec^2 x$ b) $\operatorname{sen} x + x\cos x - 2\sec^2 x$

c) $\cos x - x\operatorname{sen} x + 2\sec^2 x$ d) $\cos x + x\operatorname{sen} x - 2\sec^2 x$

Resolución

Sea:

$$f(x) = x\cos x + 2\tan x \Longrightarrow f'(x) = (x\cos x)' + 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)'$$

$$= x'\cos x + x\cos' x + 2\frac{\operatorname{sen}' x\cos x - \operatorname{sen} x\cos' x}{\cos^2 x}$$

$$= 1\cdot\cos x + x\cdot(-\operatorname{sen} x) + 2\frac{\cos x\cdot\cos x - \operatorname{sen} x\cdot(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \cos x - x\operatorname{sen} x + 2\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos x - x\operatorname{sen} x + 2\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \cos x - x\operatorname{sen} x + 2\sec^2 x$$

Respuesta: $\cos x - x\operatorname{sen} x + 2\sec^2 x$

1677. Obtener la derivada de la siguiente función:

$$F(x) = (2x^3-1)^3(x^2+x+1)^5$$

a) $y(2x^3-1)^2(x^2+x+1)^4$

b) $18x^2(x^2+x+1) + 5(2x^3-1)(2x+1)$

c) $(2x^3-1)^2(x^2+x+1)^4\big(18(x^2+x+1)+5(2x^3-1)(2x+1)\big)$

d) $Ninguno$

Resolución

Sea:

$$F(x) = (2x^3-1)^3(x^2+x+1)^5$$

$$\Longrightarrow F'(x) = \left((2x^3-1)^3\right)'(x^2+x+1)^5 + (2x^3-1)^3\left((x^2+x+1)^5\right)'$$

$$= (3(2x^3-1)^2)(2x^3-1)'(x^2+x+1)^5 + (2x^3-1)^3 5(x^2+x+1)^4$$

$$(x^2+x+1)'$$

$$= (3(2x^3-1)^2)(6x^2-0)(x^2+x+1)^5 + (2x^3-1)^3 5(x^2+x+1)^4$$
$$(2x+1)$$
$$= 18x^2(2x^3-1)^2(x^2+x+1)^5 + 5(2x^3-1)^3(x^2+x+1)^4(2x+1)$$
$$= (2x^3-1)^2(x^2+x+1)^4\big(18x^2(x^2+x+1) + 5(2x^3-1)(2x+1)\big)$$

Respuesta: *Ninguno*

1678. Sea $y^2 = x^3 + 3x^2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto $(1,-2)$.

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ b) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x$ c) $\frac{1}{4} - \frac{9}{4}x$ d) $\frac{1}{6} + \frac{16}{6}x$

Resolución

Sea:

$$y^2 = x^3 + 3x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}(x^3+3x^2)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dy}y^2\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}3x^2 \Rightarrow 2yy' = 3x^2 + 6x$$
$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2+6x}{2y}$$

Se tiene el punto (1,-2), entonces:

$$y' = \frac{3x^2+6x}{2y} \Rightarrow y' = \frac{3(1)^2+6(1)}{2(-2)} = \frac{3+6}{-4} = -\frac{9}{4}$$

Se tiene $(1,-2)$ y $m = -\frac{9}{4}$ luego:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = -\frac{9}{4}(x-1) = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}x$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{4} - \frac{9}{4}x$$

Respuesta: $y = \frac{1}{4} - \frac{9}{4}x$

Aplicación de la derivada

1679. Determinar los valores máximos y mínimos absolutos de la función f, sobre el intervalo dado:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \qquad [-2,3]$$

a) $f(-2) = -19, f(-1) = 8$ b) $f(2) = -19, f(1) = 8$

c) $f(-2) = -19, f(1) = 8$ d) $f(2) = -19, f(-1) = 8$

Resolución

Determinemos la derivada de la función:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \Longrightarrow f(x)' = 6x^2 - 6x - 12 + 0$$

Determinemos los puntos críticos:

$$f(x)' = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$\Longrightarrow 6(x^2 - x - 2) = 0 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Longrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Longrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow x = 2 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Existen dos puntos críticos en el intervalo, [-2,3].
Evaluemos en la función $f(x)$ los puntos críticos y los extremos del intervalo:

Evaluar $x = -2$ en $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

$$f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 12(-2) + 1$$

$$= -16 - 12 + 24 + 1 = -3$$

Evaluar $x = -1$ en $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1$$

$$= -2 - 3 + 12 + 1 = 8$$

Evaluar $x = 2$ en $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 1$$

$$= 16 - 12 - 24 + 1 = -19$$

Evaluar $x = 3$ en $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

$$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 - 12(3) + 1$$

$$= 54 - 27 - 36 + 1 = -8$$

Así se tiene:

Mínimo absoluto en: $f(2) = -19$

Máximo absoluto en: $f(-1) = 8$

Respuesta: $f(2) = -19, f(-1) = 8$

1680. Compruebe si la función dada, satisface el teorema de Rolle.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2, \qquad [-2, 2]$$

a) $c = 8$ b) $c = 6$ c) $c = 4$ d) *No cumple*

Resolución

Teorema de Rolle. Si f es una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

Entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$

Al ver que $f(x) = x^3 - 3x + 2$ es una función continua en $[-2, 2]$, además $f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b) solo falta verificar si $f(a) = f(b)$, es decir:

Sea $x = -2$ evaluar en $f(x) = x^3 - 3x + 2$ tal que:

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0$$

Sea $x = 2$ evaluar en $f(x) = x^3 - 3x + 2$ tal que:

$$f(2) = (2)^3 - 3(2) + 2 = 4$$

Por tanto $f(a) \neq f(b)$, es decir $f(-2) \neq f(2)$

Respuesta: *No cumple con el teorema de Rolle.*

1681. Sea la función:

$$h(x) = x^3 - 12x + 2$$

Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f, además los puntos de inflexión

a) $P_{max}(-2, 18), P_{min}(2, -14)$ y $P_{inf}(0, 2)$

b) $P_{max}(-2, 18), P_{min}(2, -14)$ y $P_{inf}(2, 0)$

c) $P_{max}(-2, 18), P_{min}(-14, 2)$ y $P_{inf}(0, 2)$

d) $P_{max}(-18, 2), P_{min}(2, -14)$ y $P_{inf}(0, 2)$

Resolución

Para los valores máximos y mínimos locales se necesita la derivada:

$$h'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 12 + 0 = 0$$

$$\Longrightarrow 3x^2 = 12 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$$

$$\Longrightarrow x = -2 \quad o \quad x = 2$$

Ya que no se tiene un intervalo, para los valores máximos y mínimos locales de f, solo se evalúan los puntos críticos en la función f.

Para $x = -2$ evaluamos en $h(x) = x^3 - 12x + 2$, es decir:

$$h(-2\ ) = (-2)^3 - 12(-2) + 2$$

$$= -8 + 24 + 2 = 18$$

Para $x = 2$ evaluamos en $h(x) = x^3 - 12x + 2$, es decir:

$$h(2\ ) = (2)^3 - 12(2) + 2$$

$$= 8 - 24 + 2 = -14$$

Por tanto tiene un máximo local en $h(-2\ ) = 18$ y tiene un mínimo local en $h(2) = -14$.

Para la concavidad se necesita la segunda derivada y ver si es mayor o menor que cero.

$$h'(x) = 3x^2 - 12 \Longrightarrow 6x = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0$$

Tendrá un punto de inflexión en $x = 0$ para $h(x) = x^3 - 12x + 2$, es decir:

$$h(0) = 0^3 - 12(0) + 2 = 2$$

Respuesta: $P_{max}(-2, 18)$, $P_{min}(2, -14)$ y $P_{inf}(0,2)$

1682. Halle el límite de:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+1}{x^3-1}$$

utilizando L'Hôpital.

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) 3

Resolución

Notar que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+1}{x^3-1}=\frac{0}{0}$$

Por tanto, se tendrá:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-2x^2+1)'}{(x^3-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+0}{3x^2-0}$$

$$\frac{3(1)^2-4(1)}{3(1)^2}=\frac{3-4}{3}=-\frac{1}{3}$$

Respuesta: $-\frac{1}{3}$

1683. Determine el límite usando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$$

a) 0 b) e c) e^{-1} d) $Ninguno$

Resolución

Sea:

$$y=x^{\frac{1}{1-x}}\Longrightarrow \ln y=\ln x^{\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{1-x}\ln x=\frac{\ln x}{1-x}$$

Si:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\frac{\ln 1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hôpital se tendrá:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{1}=-1$$

Así en el ejercicio original se tendrá:

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \ln y} = e^{-1}$$

Respuesta: e^{-1}

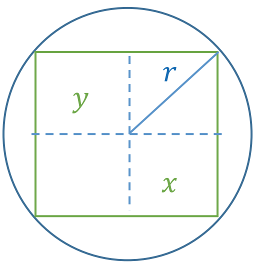
1684. Hallar la dimensión del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un círculo de radio r.

a) $x = -\dfrac{r}{\sqrt{2}},\quad y = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ b) $x = \dfrac{r}{\sqrt{2}},\quad y = -\dfrac{r}{\sqrt{2}}$

c) $x = -\dfrac{r}{\sqrt{2}},\quad y = -\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ d) $x = \dfrac{r\cdot\sqrt{2}}{2}\quad y = \dfrac{r\cdot\sqrt{2}}{2}$

Resolución

Gráficamente:



Se define el área del rectángulo por:

$$A = 2x\cdot 2y = 4xy$$

Por Pitágoras el radio:

$$r^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow y^2 = r^2 - x^2$$

$$\Longrightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \Longrightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Reemplazando en el área del rectángulo:

$$A = 4xy \Longrightarrow A = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Derivando para hallar los valores máximos:

$$A = 4x\sqrt{r^2 - x^2} \Longrightarrow A' = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{4(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Longrightarrow r^2 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow r^2 = 2x^2 \Longrightarrow r = \pm\sqrt{2}x$$

$$\Longrightarrow r = \sqrt{2}x \Longrightarrow \frac{r}{\sqrt{2}} = x$$

Reemplazando en:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \Longrightarrow y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \sqrt{\frac{2r^2 - r^2}{2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Respuesta: $x = y = \dfrac{r \cdot \sqrt{2}}{2}$

1685. Encontrar la antiderivada de:

$$f(x) = \frac{3x^4 - x^3 + 6x^2}{x^4}$$

a) $x - \ln x - 6 + C$
b) $3x - \ln x - 6$
c) $3x + \ln x - 6 + C$
d) $3x - \ln x - 6 + C$

Resolución

Sea:

$$f(x) = \frac{3x^4 - x^3 + 6x^2}{x^4} = \frac{3x^4}{x^4} - \frac{x^3}{x^4} + \frac{6x^2}{x^4} = 3 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}$$

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x} + 6x^{-2}$$

Luego:

$$F(x) = 3x - \ln x + 6 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = 3x - \ln x - 6x^{-1} + C$$

Respuesta: $3x - \ln x - 6 + C$

La integral

1686. Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = 1 + x^2$ entre $x = -1$ y $x = 2$ con seis rectángulos de aproximación y puntos derechos.

a) $\dfrac{33}{7}$
b) $\dfrac{44}{5}$
c) $\dfrac{55}{8}$
d) $\dfrac{66}{5}$

Resolución

Sea $f(x) = 1 + x^2$, la distancia para las particiones es:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \Delta x = \frac{2-(-1)}{6}$$

$$= \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Sea:

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i) \Longrightarrow R_6 = \sum_{i=1}^{3} \Delta x \cdot f(x_i)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(0) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(1) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 + 0^2 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 + 1^2 + 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 + 2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{55}{4}\right) = \frac{55}{8}$$

Respuesta: $\frac{55}{8}$

1687. Expresar el área bajo la gráfica de f como un límite.

$$f(x) = \sqrt{sen\, x}, \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{sen\, \pi}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{sen\left(\frac{\pi i}{n}\right)}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \pi \cdot \sqrt{sen\left(\frac{\pi i}{n}\right)}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{sen\left(\frac{\pi i}{n}\right)}$

Resolución

Sea:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Longrightarrow \Delta x = \frac{\pi - 0}{n} = \frac{\pi}{n}$$

Entonces, a partir de 0 tendrá un aumento de $\frac{\pi}{n}$ que se puede expresar para los x_i como:

$$x_i = 0 + i\Delta x = i\frac{\pi}{n} = \frac{\pi i}{n}$$

Se puede expresar el área como:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{sen\ x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{sen\ x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{sen\left(\frac{\pi i}{n}\right)}$$

Respuesta: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{sen\left(\frac{\pi i}{n}\right)}$

1688. Encontrar el valor de la integral mediante el límite:

$$\int_{-2}^{0} (x^2 + x)dx$$

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 2 d) 3

Resolución

Determinar las particiones:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \Delta x = \frac{0-(-2)}{n} = \frac{2}{n}$$

Entonces a partir de 2 tendrá un aumento de $\frac{2}{n}$ que se puede expresar para los x_i como:

$$x_i = -2 + i\Delta x = -2 + i\left(\frac{2}{n}\right) = -2 + \frac{2i}{n}$$

Expresando la integral como el límite se tendrá:

$$\int_{-2}^{0} (x^2 + x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f\left(-2 + \frac{2i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \cdot \left(\left(-2 + \frac{2i}{n}\right)^2 + \left(-2 + \frac{2i}{n}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \cdot \left(4 - \frac{8i}{n} + \frac{4i^2}{n^2} - 2 + \frac{2i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \cdot \left(2 - \frac{6i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{6i}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 2 - \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(2n - \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(4 - 6 \cdot \frac{(n+1)}{n} + \frac{4}{3} \cdot \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{(2n+1)}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(4 - 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{4}{3} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= 4 - 6(1) + \frac{4}{3}(1)(2) = \frac{2}{3}$$

Respuesta: $\frac{2}{3}$

1689. Determinar el valor de la integral:

$$\int_0^{30} \left(\frac{2x}{3} + 45 + \frac{5x}{6}\right) dx$$

a) 2024 *b*) 2025 *c*) 2026 *d*) 2027

Resolución

Sea:

$$\int_0^{30} \left(\frac{2x}{3} + 45 + \frac{5x}{6}\right) dx = \int_0^{30} \frac{2x}{3} dx + \int_0^{30} 45 dx + \int_0^{30} \frac{5x}{6} dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{30} x dx + 45\int_0^{30} dx + \frac{5}{6}\int_0^{30} x dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{30} + 45\,(x)\Big|_0^{30} + \frac{5}{6}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{30}$$

$$= \frac{1}{3}(30^2 - 0) + 45(30 - 0) + \frac{5}{12}(30^2 - 0)$$

$$= \frac{900}{3} + 45 \cdot 30 + \frac{4500}{12} = 300 + 1350 + 375 = 2025$$

Respuesta: 2025

1690. Localizar el valor de la integral dada por:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

a) $\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

b) $\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

c) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

d) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

Resolución

Tomando:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u = 1-x^2 \\ du = -2x\,dx \Longrightarrow dx = -\frac{1}{2x}\,du \end{cases}$$

Reemplazando en la integral se tendrá:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int x\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)du$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Reemplazar la variable $u = 1-x^2$, es decir:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

donde C es una constante.

Respuesta: $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

1691. Encontrar la integral:

$$\int \operatorname{sen}^{2}\alpha \cdot \cos\alpha \, d\alpha$$

a) $(\operatorname{sen}\alpha)^{3}$ b) $\frac{1}{3}(\operatorname{sen}\alpha)^{3}+C$ c) $\frac{1}{6}\operatorname{sen}\alpha^{3}+C$ d) $\frac{1}{9}\operatorname{sen}^{3}\alpha+C$

Resolución

Sea el cambio de variables:

$$\int \operatorname{sen}^{2}\alpha \cdot \cos\alpha \, d\alpha \Longrightarrow \begin{cases} u = \operatorname{sen}\alpha \\ du = \cos\alpha \; d\alpha \Longrightarrow d\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} du \end{cases}$$

Reemplazando:

$$\int \operatorname{sen}^{2}\alpha \cdot \cos\alpha \, d\alpha = \int \mathrm{u}^{2}\cos\alpha \frac{1}{\cos\alpha} du = \int u^{2} du$$

$$= \frac{1}{3}u^{3} + C$$

Reemplazando:

$$\frac{1}{3}u^{3} + C = \frac{1}{3}(\operatorname{sen}\alpha)^{3} + C$$

Respuesta: $\frac{1}{3}(\operatorname{sen}\alpha)^{3}+C$

1692. Hallar la integral:

$$\int \frac{x^{3}}{x^{4}-5} dx$$

a) $\ln(x^{4}-5)^{\frac{1}{2}}+C$ b) $\ln(x^{4}-5)+C$

c) $\ln(x^{4}-5)^{\frac{1}{4}}$ d) $\ln(x^{4}-5)^{\frac{1}{4}}+C$

Resolución

Sea el cambio de variable:

$$\int \frac{x^{3}}{x^{4}-5} dx \Longrightarrow \begin{cases} u = x^{4}-5 \\ du = 4x^{3}dx \Longrightarrow dx = \dfrac{1}{4x^{3}} du \end{cases}$$

Así:

$$\int \frac{x^{3}}{x^{4}-5} dx = \int \frac{x^{3}}{u} \cdot \frac{1}{4x^{3}} du = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{4}\ln u + C = \frac{1}{4}\ln(x^4 - 5) + C$$
$$= \ln(x^4 - 5)^{\frac{1}{4}} + C$$

Respuesta: $\ln(x^4 - 5)^{\frac{1}{4}} + C$

1693. Determinar el valor de la integral definida:

$$\int_0^{13} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}dx$$

a) 2 b) 3 c) 4 d) *Ninguno*

Resolución

Si:

$$\int_0^{13} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}dx \Longrightarrow \begin{cases} u = 1 + 2x \\ du = 2dx \Longrightarrow \frac{1}{2}du = dx \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Para } x = 13 \text{ en } u = 1 + 2x \Longrightarrow u = 1 + 2(13) = 27 \\ \text{Para } x = 0 \text{ en } u = 1 + 2x \Longrightarrow u = 1 + 2(0) = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{13} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}dx = \int_1^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{u^2}} \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\left(u^{\frac{1}{3}}\right)\Big|_1^{27}$$
$$= \frac{3}{2}\left(27^{\frac{1}{3}} - 1^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{2}(3-1) = 3$$

Respuesta: 3

1694. Use integración por partes para calcular el valor de la integral dada por:

$$\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}dx$$

a) $\dfrac{e^{2x}}{4(1+2x)} + C$

b) $-\dfrac{xe^{2x}}{2(1+2x)} - \dfrac{1}{4}e^{2x} + C$

c) $\dfrac{xe^{2x}}{2(1+2x)} - \dfrac{1}{4}e^{2x} + C$

d) $-\dfrac{xe^{2x}}{2(1+2x)} + \dfrac{1}{4}e^{2x} + C$

Resolución

Sea:

$$\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}dx \Rightarrow \begin{cases} u = xe^{2x} \Rightarrow du = (1\cdot e^{2x} + x\cdot 2e^{2x})\,dx \\ dv = \dfrac{1}{(1+2x)^2}\,dx \Leftarrow v = -\dfrac{1}{2(1+2x)} \end{cases}$$

Evaluando:

$$\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}dx = xe^{2x}\left(-\frac{1}{2(1+2x)}\right) - \int (e^{2x} + 2xe^{2x})\left(-\frac{1}{2(1+2x)}\right)dx$$

$$= -\frac{xe^{2x}}{2(1+2x)} + \int \frac{e^{2x}(1+2x)}{2(1+2x)}dx = -\frac{xe^{2x}}{2(1+2x)} + \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$

$$= -\frac{xe^{2x}}{2(1+2x)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{2} + C = -\frac{xe^{2x}}{2(1+2x)} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$= \frac{e^{2x}}{4(1+2x)} + C$$

Respuesta: $\dfrac{e^{2x}}{4(1+2x)} + C$

1695. Evalúe la integral:

$$\int \frac{r^2}{r-1}dr$$

a) $\dfrac{r^2}{2} + r + \ln r + C$

b) $\dfrac{r^2}{2} + r + \ln(r+1) + C$

c) $\dfrac{r^2}{2} + r - \ln(r-1) + C$

d) $\dfrac{r^2}{2} + r + \ln(r-1) + C$

Resolución

Por el algoritmo de la división se tendrá:

$$\frac{r^2}{r-1} \Rightarrow r^2 = (r-1)(r+1) + 1 \Rightarrow \frac{r^2}{r-1} = r + 1 + \frac{1}{r-1}$$

Así se tendrá:

$$\int \frac{r^2}{r-1}dr = \int\left(r + 1 + \frac{1}{r-1}\right)dr$$

$$= \int r dr + \int 1 dr + \int \frac{1}{r-1} dr = \frac{r^2}{2} + r + \ln(r-1) + C$$

Respuesta: $\frac{r^2}{2} + r + \ln(r-1) + C$

1696. Integrar:

$$\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)} dx$$

a) $2\ln(x+5) + \ln(x-2)$

b) $2\ln(x-5) + \ln(x+2) + C$

c) $2\ln(x+5) - \ln(x-2) + C$

d) $2\ln(x+5) + \ln(x-2) + C$

Resolución

Analizando la función dentro de la integral por fracciones parciales se tendrá:

$$\frac{x-9}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} \quad \text{descomponiendo la función}$$

$$= \frac{A(x-2) + B(x+5)}{(x+5)(x-2)} = \frac{Ax - 2A + Bx + 5B}{(x+5)(x-2)} = \frac{Ax + Bx - 2A + 5B}{(x+5)(x-2)}$$

$$= \frac{(A+B)x - 2A + 5B}{(x+5)(x-2)}$$

Así se tiene:

$$\frac{x-9}{(x+5)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A + 5B}{(x+5)(x-2)}$$

$$\Longrightarrow x - 9 = (A+B)x + (-2A + 5B)$$

Igualando términos, se tendrá el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + 5B = -9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2A + 2B = 2 \\ -2A + 5B = -9 \end{cases} \Longrightarrow 7B = -7 \Longrightarrow B = -1$$

Reemplazando B en el primer sistema de ecuaciones:

$$A + B = 1 \Longrightarrow A = 1 - B = 1 - (-1) = 2$$

$$\Longrightarrow A = 2$$

Por tanto:

$$\frac{x-9}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} = \frac{2}{x+5} - \frac{1}{x-2}$$

En la integral se tendrá:

$$\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)} = \int \left(\frac{2}{x+5} - \frac{1}{x-2}\right) dx$$

$$= \int \frac{2}{x+5} dx - \int \frac{1}{x-2} dx = 2\ln(x+5) - \ln(x-2) + C$$

Respuesta: $2\ln(x+5) - \ln(x-2) + C$

Aplicaciones de la integral

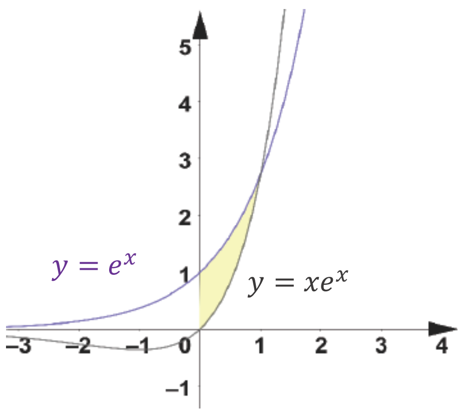
1697. Estimar el área sombreada entre las funciones dadas por:

$y = e^x, \quad y = xe^x$ en $[0,1]$

a) e b) $e-2$ c) $e+2$ d) $Ninguno$

Resolución

Gráficamente:



Como ya se tiene los parámetros, evaluar en la integral, talque:

$$\int_0^1 (e^x - xe^x) dx$$

$$= \left(e^x - (xe^x - e^x)\right)\Big|_0^1$$

$$= (2e^x - xe^x)\Big|_0^1$$

$$= (2 \cdot e^1 - 1 \cdot e^1) - (2e^0 - 0 \cdot e^0)$$

$$= (2e - e) - (2 - 0) = e - 2$$

Respuesta: $e - 2$

1698. Calcular el área entre las funciones:

$$y=\sqrt{x},\quad y=\frac{1}{2}x \text{ hasta } x=9$$

a) $\frac{39}{16}$ b) $\frac{49}{14}$ c) $\frac{59}{12}$ d) $\frac{69}{10}$

Resolución

Analizando puntos de intersección con el eje x:

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2}x \Longrightarrow x=\frac{1}{4}x^2 \Longrightarrow 4x=x^2 \Longrightarrow x^2-4x=0 \Longrightarrow x(x-4)=0$$

$$\Longrightarrow x=0 \quad o \quad x=4$$

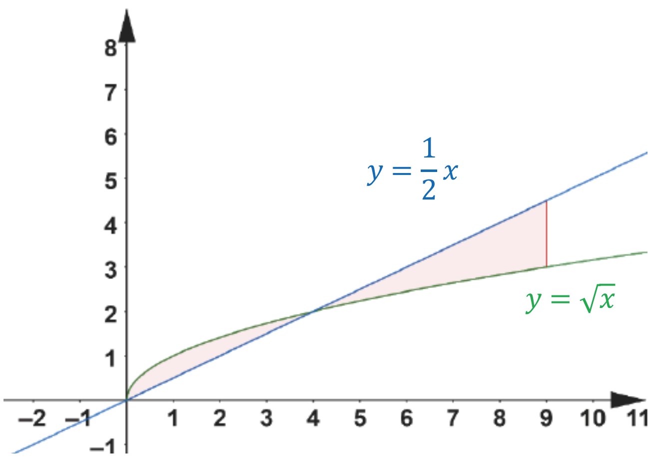
Es hasta $x=9$, entonces se evalúa en la integral:

$$\int_0^9\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)dx=\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)dx+\int_4^9\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{x}\right)dx$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^2\right)\Bigg|_0^4+\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_4^9$$

$$=\left[\left(\frac{16}{3}-4\right)-0\right]+\left[\left(\frac{81}{4}-18\right)-\left(4-\frac{16}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{81}{4}+\frac{32}{3}-26=\frac{59}{12}$$



Respuesta: $\frac{59}{12}$

1699. Obtener el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por las curvas descritas en torno a la recta.

$$y = 1 + \sec x, \qquad y = 3, \qquad x = \pm\frac{\pi}{3}$$

alrededor del eje $y = 1$.

a) $2\pi\left(\frac{4}{3}\pi + \sqrt{3}\right)$ b) $2\pi\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$ c) $\pi\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$ d) $Ninguno$

Resolución

Como es desde $y = 1$ entonces el radio interior es $(1 + \sec x) - 1$ y el radio exterior $3 - 1$, por tanto el área está dado por:

$$A(x) = \pi(2^2 - (\sec x)^2) = \pi(4 - \sec^2 x)$$

Analizando respecto al eje x, el volumen será:

$$V(x) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} A(x)dx \Longrightarrow V(x) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \pi(4 - \sec^2 x)dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (4 - \sec^2 x)dx = 2\pi\,(4x - \tan x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2\pi\left[\left(4\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - (4(0) - \tan 0)\right]$$

$$= 2\pi\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$$

Respuesta: $2\pi\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$

1700. Con el método de los cascarones cilíndricos, calcule el volumen de cada sólido generado al rotar la región delimitada por las curvas alrededor del eje x .

$$y = 4x - x^2, \; y = 3, \; \text{alrededor de } x = 1$$

a) $\frac{6}{3}\pi$ b) $\frac{8}{3}\pi$ c) $\frac{10}{3}\pi$ d) $Ninguno$

Resolución

El radio de la circunferencia será: $2\pi(x-1)$

Para los parámetros respecto al eje x se debe evaluar en:

$$y = y \Longrightarrow 4x - x^2 = 3 \Longrightarrow 0 = x^2 - 4x + 3$$

$$\Longrightarrow 0 = (x-1)(x-3) \Longrightarrow x = 1 \quad o \quad x = 3$$

El volumen está dado por:

$$V(x) = \int_a^b A(x)dx \Longrightarrow V(x) = \int_1^3 2\pi(x-1)(4x - x^2 - 3)dx$$

$$= 2\pi \int_1^3 (3 - 7x + 5x^2 - x^3)dx = 2\pi \left(3x - \frac{7}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_1^3$$

$$= 2\pi\left[\left(3\cdot 3 - \frac{7}{2}\cdot 3^2 + \frac{5}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{4}\cdot 3^4\right) - \left(3\cdot 1 - \frac{7}{2}\cdot 1^2 + \frac{5}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{4}\cdot 1^4\right)\right]$$

$$= 2\pi\left[\left(3\cdot 3 - \frac{7}{2}\cdot 3^2 + \frac{5}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{4}\cdot 3^4\right) - \left(3\cdot 1 - \frac{7}{2}\cdot 1^2 + \frac{5}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{4}\cdot 1^4\right)\right]$$

$$= 2\pi\left[\left(9 - \frac{63}{2} + 45 - \frac{81}{4}\right) - \left(3 - \frac{7}{2} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= 2\pi\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi$$

Respuesta: $\frac{8}{3}\pi$

Funciones

1701. Sea la función $f(x)=\frac{1}{x}$, hallar el valor de: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

a) $-\dfrac{1}{ax}$ b) $\dfrac{1}{ax}$ c) $\dfrac{1}{a-x}$ d) $\dfrac{1}{a+x}$

Respuesta: .....

1702. Hallar el dominio de la función:

$$f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2+x-6}$$

a) $(-\infty,-3]\cup(2,+\infty)$ b) $(-\infty,-2)\cup[2,3)\cup(3,+\infty)$
c) $(-\infty,-3)\cup(-3,2)\cup(2,+\infty)$ d) $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$

Respuesta: .....

1703. Exprese el área de un triángulo equilátero en función de la longitud de uno de sus lados.

a) $A(a)=\dfrac{a^2}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{2}};\ a<0$ b) $A(a)=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4};\ a>0$

c) $A(a)=\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\ a>0$ d) $A(a)=\dfrac{a^2}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{2}};\ a\leq 0$

Respuesta: .....

1704. Determinar si la siguiente función es función par o impar.

$$f(x)=e^x+e^{-x}$$

a) $f(x)$ es par b) $f(x)$ es impar c) $f(x)$ es par e impar d) Ninguna

Respuesta: .....

1705. Sean las funciones:

$$f(x)=\sqrt{x+3}\ \text{ y }\ g(x)=4x-5$$

¿Se dará la igualdad $f\circ g=g\circ f$?

a) No cumple la igualdad b) Si se cumple la igualdad

Respuesta: .....

1706. Sea la función compuesta:

$$(f \circ g)(x+2) = x - x^2 \text{ y } g(x-2) = x$$

Hallar el valor de $f(x)$.

a) $-x^2 - 9x - 20$ b) $-x^2 - 5x + 6$
c) $-x^2 - 5x - 6$ d) $-x^2 + 9x - 20$

Respuesta: .....

1707. Teniendo la función:

$$M(M(x)) = x$$

Calcular el valor de:

$$\underbrace{M\left(M\left(M(\ldots\ldots\ldots.M(y))\right)\right)}_{80-veces}$$

a) 1 b) y c) $-y$ d) Ninguna

Respuesta: .....

Límites

1708. Por la definición de límite demostrar:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{3}{4}x + 1\right) = 1$$

a) ε b) $\frac{\varepsilon}{3}$ c) $\frac{3\varepsilon}{4}$ d) $\frac{4\varepsilon}{3}$

Respuesta: .....

1709. Hallar el límite:

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Respuesta: .....

1710. Determinar el valor del límite:

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{y\sqrt{1+y}}-\frac{1}{y}\right)$$

a) 0 b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) No existe límite

Respuesta: .....

1711. Encontrar el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}\right)$$

a) 0 b) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) No existe límite

Respuesta: .....

1712. Determinar si existe límite dado por:

$$\lim_{y\to 0}(2+|y-3|)$$

Si no existe justifique el porqué.

a) 0 b) 2 c) No existe límite d) Ninguna

Respuesta: .....

1713. Encontrar el valor del límite trigonométrico:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{1-\tan x}$$

a) $\cos\frac{\pi}{2}$ b) $-\cos\frac{\pi}{4}$ c) $\cos\frac{\pi}{6}$ d) $\cos\frac{\pi}{4}$

Respuesta: .....

1714. Se sabe que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^{2025}}=5$$

Hallar el valor de: $\lim_{x\to 0}f(x)$.

a) 0 b) 5 c) 10 d) Ninguno

Respuesta: .....

Continuidad

1715. Sea la función dada por:

$$f(x) = 3x^4 + 5x + \sqrt[3]{x^2 + 4}\,; a = 2$$

¿Será continua para a=2?. Justificar la respuesta.

a) $f(x)$ es continua b) $f(x)$ no es continua c) Ambas d) Ninguna

Respuesta: .....

1716. Sea la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\,; x \leq 3 \\ cx + d\,; x > 3 \end{cases}$$

Si $\lim_{x\to 3} f(x) = 2,\ \lim_{x\to 1} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 5} f(x) = 5$. ¿cuáles son los posibles valores de a, b, c y d para que la función $f(x)$ sea continua?

a) $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{5}{2}, c = 1, d = -1$ b) $a = 1, b = -1, c = \frac{3}{2}, d = -\frac{5}{2}$

c) $a = -1, b = \frac{3}{2}, c = -\frac{5}{2}, d = 1$ d) $a = -\frac{5}{2}, b =, 1 = -1, d = \frac{3}{2}$

Respuesta: .....

1717. Sea la función $f(x) = x^5 + 2x^3 - x - 1$, ¿tiene una raíz en el intervalo [-1,1]?

a) tiene una raiz b) no tiene una raiz c) ambas d) Ninguno

Respuesta: .....

1718. Determinar el valor de:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m + m\sqrt{m}}{2m^{\frac{3}{2}} + 3m - 5}$$

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $-\infty$ d) $+\infty$

Respuesta: .....

1719. Encontrar el valor del límite:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{e^{3m}-e^{-3m}}{e^{3m}+e^{-3m}}$$

a) 0 b) 1 c) $-\infty$ d) $+\infty$

Respuesta: .....

1720. Determinar las asíntotas verticales y horizontales de la función:

$$y=\frac{2x^2+1}{3x^2+2x-1}$$

a) $x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}$ b) $x=-1, y=\frac{2}{3}$

c) $x=-1, x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}$ d) $x=-1, y=\frac{1}{2}, y=\frac{2}{3}$

Respuesta: .....

1721. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva dada por:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

en el punto $(1,1)$.

a) $y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x$ b) $y=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}x$ c) $y=\frac{3}{2}-2x$ d) $y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x$

Respuesta: .....

La derivada

1722. A través de la definición de límite, hallar la derivada de la función:

$$f(x)=mx+b$$

a) m b) x c) b d) Ninguno

Respuesta: .....

1723. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto (2,3)

$$y = x + \frac{2}{x}$$

a) $y = x + 2$ b) $y = x - 2$ c) $y = \frac{1}{2}x + 2$ d) $y = \frac{1}{2}x - 2$

Respuesta: .....

1724. Buscar la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $y = 1 + 2\,e^{x} - 3\,x$ que es paralela a la recta $32x - y = 15$.

a) $y = 3x + 6\ln 3$ b) $y = x - 6\ln 3$

c) $y = 32x - 7 + 6\ln 3$ d) $y = 3x + 7 - 6\ln 3$

Respuesta: .....

1725. Determinar $f'(x)$ de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 e^x}{x^2 + e^x}$$

a) $\dfrac{xe^x}{(x^2 + e^x)^2}$ b) $\dfrac{x^3 + 2e^x}{(x^2 + e^x)^2}$ c) $\dfrac{xe^x(x^3 + 2e^x)}{(x^2 + e^x)^2}$ d) $\dfrac{xe^x(x^3 - 2e^x)}{(x^2 + e^x)^2}$

Respuesta: .....

1726. Localizar la derivada trigonométrica de:

$$f(m) = 2\sec m - \operatorname{cosec} m$$

a) $\sec m \tan m - \operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x$ b) $\sec m \tan m + \operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x$

c) $4\sec m \tan m - \operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x$ d) $2\sec m \tan m + \operatorname{cosec} x \operatorname{cotan} x$

Respuesta: .....

1727. Obtener la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \operatorname{sen}^2(\tan 5x)$$

a) $f(x) = \cos(\tan 5x)$

b) $f(x) = \cos^2(\tan 5x)$

c) $f(x) = 2\operatorname{sen}(\tan(5x)) \cdot \cos(\tan(5x))$

d) $f(x) = 10\operatorname{sen}(\tan(5x)) \cdot \cos(\tan(5x)) \cdot \sec^2 5x$

Respuesta: .....

1728. Se sabe que $f(x) = \log_b(3x^2 - 2)$, ¿para qué valor b es $f'(1) = 3$?

a) $b = 10$ b) $b = 10^2$ c) $b = 10^3$ d) Ninguna

Respuesta: .....

Aplicación de la derivada

1729. Determinar los valores máximos y mínimos absolutos de la función f, sobre el intervalo dado:

$$f(t) = \sqrt{4 - t^2}, \qquad [-2, 2]$$

a) $f(-2) = -\sqrt{2}, f(\sqrt{2}) = 2$ b) $f(1) = -\sqrt{3}, f(\sqrt{2}) = 2$

c) $f(\sqrt{2}) = -\sqrt{3}, f(-1) = 2$ d) $f(-1) = -\sqrt{3}, f(\sqrt{2}) = 2$

Respuesta: .....

1730. Compruebe que la función dada, satisface el teorema de Rolle.

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, \qquad [0, 9]$$

a) $c = \frac{4}{3}$ b) $c = \frac{7}{3}$ c) $c = \frac{9}{4}$ d) Ninguno

Respuesta: .....

1731. Sea la función:

$$h(x) = 2 + 2x^2 - x^4$$

Encuentre los valores máximos y mínimos locales de *f*, además los puntos de inflexión.

a) $P_{max}\,(-1,3),\ P_{min}\,(0,2)\ y\ P_{inf}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{23}{89}\right)$

b) $P_{max}\,(1,3),\ P_{min}\,(0,2)\ y\ P_{inf}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{23}{89}\right)$

c) $P_{max}\,\{(-1,3),(1,3)\}, P_{min}\,(0,2)\ y\ P_{inf}\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{23}{89}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{23}{89}\right)\right\}$

d) $Ninguna$

Respuesta: .....

1732. Determinar el límite de:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^a - mx + m - 1}{(x-1)^2}$$

utilizando L'Hôpital.

a) e^2 b) e^4 c) e^6 d) Ninguno

Respuesta: .....

1733. Determinar el límite usando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} (4x+1)^{\cot x}$$

a) $b = 10$ b) $b = 10^2$ c) $b = 10^3$ d) Ninguno

Respuesta: .....

1734. Hallar la dimensión del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un círculo de radio *r* = 2.

a) $x = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $x = -\sqrt{2},\quad y = \sqrt{2}$

c) $x = \sqrt{2},\quad y = -\sqrt{2}$ d) $x = \sqrt{2},\quad y = \sqrt{2}$

Respuesta: .....

1735. Encontrar la anti derivada de:

$$h(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2}$$

a) $2x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} - C$

b) $2x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{5}{3}} + C$

c) $2x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}$

d) Ninguno

Respuesta: .....

La integral

1736. Determinar la suma superior de $f(x) = 1 + x^2$ entre $x = -1$ y $x = 2$ con seis rectángulos de aproximación y puntos derechos.

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10

Respuesta: .....

1737. Expresar el área bajo la gráfica de f como un límite, no resuelva el límite, (sólo expresar).

$$f(x) = x^2, \qquad 4 \le x \le 7$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 + \frac{3i}{n}\right)^2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 + \frac{3i}{n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\pi\left(4 + \frac{3i}{n}\right)^2$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(4 + \frac{3i}{n}\right)^2$

Respuesta: .....

1738. Encontrar el valor de la integral mediante límites:

$$\int_{-2}^{0}(1 + 3x)\,dx$$

a) 30 b) 36 c) 42 d) 48

Respuesta: .....

1739. Determinar el valor de la integral:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{8}{1+x^2}\right) dx$$

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{6\pi}{3}$

Respuesta: .....

1740. Encontrar la integral dada por:

$$\int \frac{x - x^2 + x^3}{x^2} dx$$

a) $\ln x - x + \frac{1}{2}x^2$ b) $\ln x - x + \frac{1}{2}x^2 + C$

c) $\ln x + x - \frac{1}{2}x^2 + C$ d) $\ln x + \frac{1}{2}x^2 + C$

Respuesta: .....

1741. Encontrar el valor de la integral:

$$\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \, dx$$

a) $sen\, x + C$ *b*) $\cos x + C$ *c*) $sen^2 x + C$ *d*) *Ninguno*

Respuesta: .....

1742. Hallar el valor de la integral:

$$\int x^2 e^{x^3} dx$$

a) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$ b) $\frac{1}{4}e^4 + C$ c) $\frac{1}{5}e^{x^5} + C$ d) Ninguno

Respuesta: .....

1743. Determinar el valor de la integral definida:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^4}\,dx$$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{9}$ d) Ninguno

Respuesta: .....

1744. Use integración por partes para calcular el valor de la integral dada por:

$$\int_1^3 x^3 \ln x \; dx$$

a) $\frac{81}{4}\ln 3 - 5 + C$ b) $\frac{81}{4}\ln 3 - 5$ c) $\frac{81}{4}\ln 3 + 5$ d) Ninguno

Respuesta: .....

1745. Evaluar la integral dada por:

$$\int \frac{y}{y-5}\,dy$$

a) $y + 5\ln(y-5)$ b) $y + 5\ln(y+5) + C$

c) $y - 5\ln(y-5) + C$ d) $y - 5 + 5\ln(y-5) + C$

Respuesta: .....

1746. Determina la integral:

$$\int \frac{x}{(x+5)(x-2)}\,dx$$

a) $\frac{5}{7}\ln(x+5) + \frac{2}{7}\ln(x-2) + C$ b) $\frac{5}{7}\ln(x-5) + \frac{2}{7}\ln(x+2) + C$

c) $\frac{5}{7}\ln(x+5) + \frac{2}{7}\ln(x-2)$ d) Ninguno

Respuesta: .....

Aplicaciones de la integral

1747. Determinar el área entre las funciones:

$$y = 12 - x^2, \qquad y = x^2 - 6$$

a) 48 b) 56 c) 64 d) 72

Respuesta: .....

1748. Calcular el área entre las funciones:

$$y = x, \qquad y = \frac{1}{x}, \qquad y = \frac{1}{4}x$$

a) e^2 b) $\ln 2$ c) $\sqrt{2}$ d) Ninguno

Respuesta: .....

1749. Obtener el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por las curvas descritas en torno a la recta mencionada

$$y = x^3, \qquad y = 0, \qquad x = 2$$

alrededor del eje y=1.

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}\pi$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{5}{3}\pi$

Respuesta: .....

1750. Determinar, utilizando el método de los cascarones cilíndricos, el volumen de los sólidos formados al hacer girar la región entre las curvas especificadas.

$$y = x^3, \qquad y = 0, \qquad x = 1 \text{ alrededor de } y = 1$$

a) $\frac{3}{16}\pi$ b) $\frac{4}{15}\pi$ c) $\frac{5}{14}\pi$ d) $\frac{6}{13}\pi$

Respuesta: .....

RAZONAMIENTO LÓGICO

1

Razonamiento lógico

Son las habilidades que permite a las personas evaluar situaciones, resolver problemas y tomar decisiones de manera coherente y estructurada, además es esencial en matemática, filosofía, y en la vida cotidiana.

Fuente: Yandex

2

Razonamiento inductivo

Es el proceso de derivar conclusiones generales a partir de observaciones o datos específicos, las conclusiones obtenidas no son necesariamente verdaderas, pero son probables.

Fuente: Yandex

3

Razonamiento deductivo

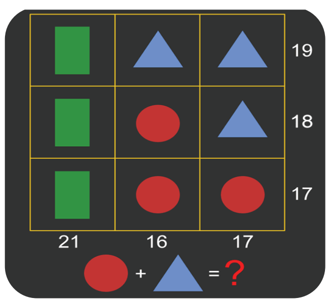
Es el proceso de derivar conclusiones especificas a partir de premisas generales. Si las premisas son verdaderas y el razonamiento es válido, la conclusión necesariamente será valida

Fuente: Vectorstock

4

Razonamiento lógico aplicativo

Se refiere al uso práctico de principios lógicos para resolver problemas y tomar desiciones, a diferencia del razonamiento teórico, el aplicativo utiliza la lógica en contextos reales, ayudando a interpretar datos y formular soluciones.



Fuente: Yandex

Usos y aplicaciones en la vida cotidiana

Una familia usa razonamiento lógico para planificar su presupuesto mensual. Analiza sus ingresos y gastos, priorizando las necesidades básicas como alimentos y vivienda, para así decidir cuánto pueden ahorrar o gastar en actividades recreativas.

Fuente: Los tiempos

Fuente: I.N.S.A.

Los agricultores del oriente utilizan el razonamiento lógico para decidir el mejor momento para sembrar y cosechar. Analiza datos climáticos, pronósticos del tiempo y ciclos de cultivo para maximizar la producción.

Un dueño de un perro en La Paz, observa que su mascota se emociona y corre hacia la puerta cada vez que toma las llaves. Concluye que el perro probablemente piensa que van a salir cada vez que escucha el sonido de las llaves.

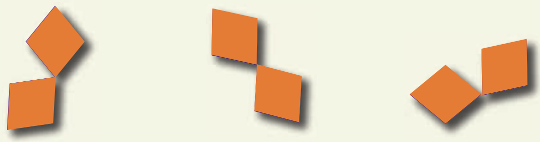
Fuente: Libre EMPRESA

Fuente: El Español

Premisa 1, todos los dispositivos eléctricos deben estar apagados, premisa 2 la familia planea usar el microondas, conclusión después de usar el horno de microondas deben apagarlo para evitar cualquier riesgo.

Lógica Basica

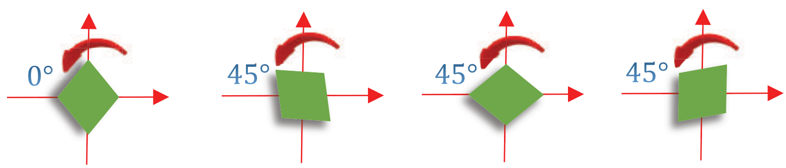
1751. ¿Cuál es la figura que sigue en la secuencia dada por:



Resolución

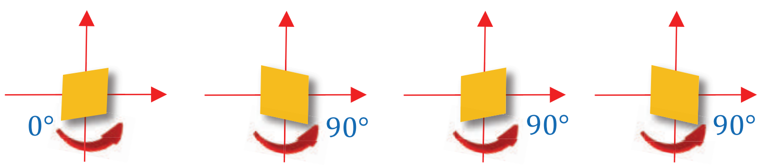
Distinguimos a los rombos y analizamos su movimiento, es decir:

Veamos el comportamiento del rombo de color verde:



Según las gráficas, da un giro de 45° grados, por lo que la cuarta figura es la que sigue.

Veamos el análisis para el rombo de color naranja:

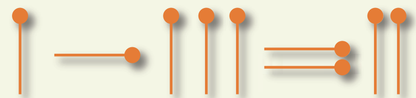


La grafica indica que se mueve con un ángulo de 90° grados, por lo que la cuarta figura es la que sigue.

Respuesta

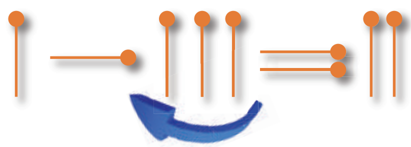
La figura que sigue en la secuencia es:

1752. Dada la figura, ¿cuántos palitos hay que mover como mínimo para obtener una verdadera igualdad?

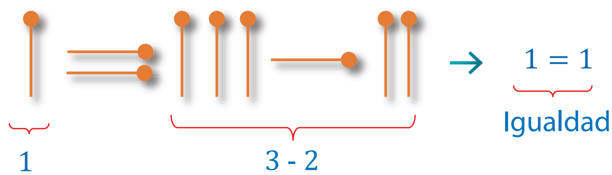


Resolución

En la figura, es suficiente mover un palito, es decir:



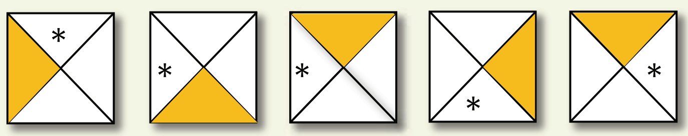
El resultado queda así:



Respuesta

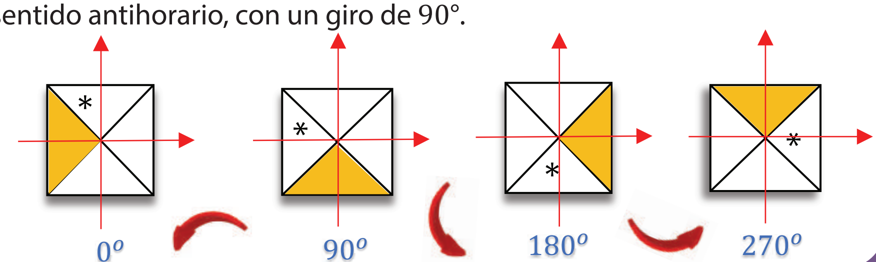
Para que sea la igualdad verdadera, se mueve un palito.

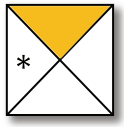
1753. ¿Qué figura no corresponde?



Resolución

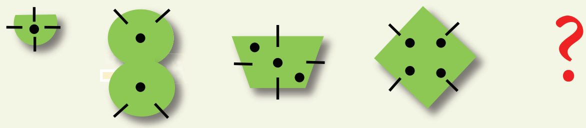
Empezando de la primera figura y siguiendo el patrón, se hace rotar en sentido antihorario, con un giro de 90°.



La figura que no corresponde es: 

Porque al girar 360° no sigue el patrón.

1754. Indicar cuál es la figura que encaja correctamente en la secuencia:



Resolución

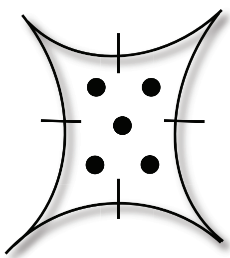
Notar que los puntos van en aumento, primero se presenta un punto, luego dos puntos, luego tres puntos y cuatro puntos, por tanto, la siguiente figura tendrá cinco puntos.

Respecto a los segmentos que rodean a los puntos, estos giran 45° grados:

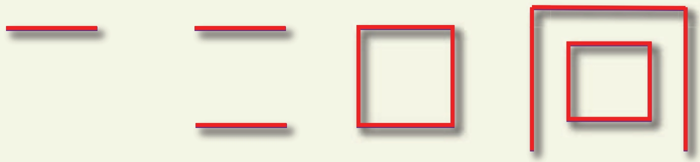
Respuesta

Por tanto, la quinta figura toma el primer caso.

Por último, las líneas de los bordes que pasan por los segmentos, tratan de encerrar a los puntos, como habrán 5 puntos, la quinta figura tendrá la siguiente forma:



1755. ¿Cuál es la figura que ocupa el quinto lugar, siguiendo la siguiente secuencia?



Resolución

La primera figura tiene una línea, en la segunda figura tiene dos líneas, la tercera figura tiene cuatro líneas y la cuarta tiene siete líneas. La secuencia se puede expresar de la siguiente manera:

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = f_1 + (2 - 1) = 1 + 1 = 2$$

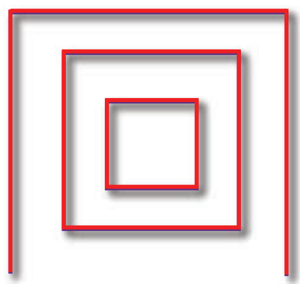
$$f_3 = f_2 + (3 - 1) = 2 + 2 = 4$$

$$f_4 = f_3 + (4 - 1) = 4 + 3 = 7$$

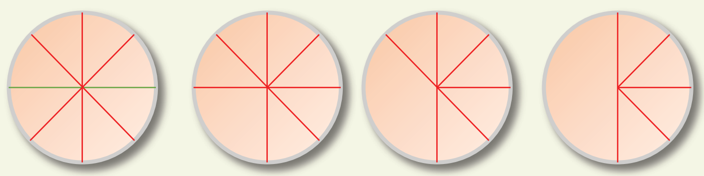
$$f_5 = f_4 + (5 - 1) = 7 + 4 = 11$$

Respuesta

Por tanto, la quinta figura tendrá 11 líneas y gráficamente se vería así:

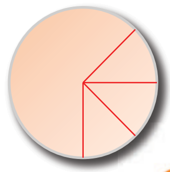


1756. Determinar qué figura completa la secuencia:



Resolución

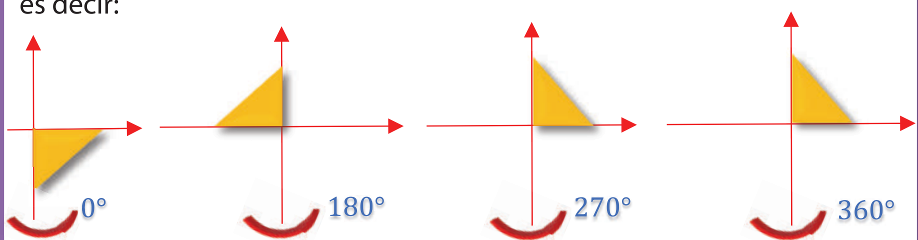
El primer círculo está dividido en 8 partes iguales, en el segundo circulo se unen dos partes iguales, en el tercer circulo se unen tres partes iguales y en el cuarto circulo se unen cuatro partes iguales, por lo que en el quinto circulo se unirán 5 partes iguales y quedará como:



1757. ¿Qué figura continúa en la secuencia de las imágenes?

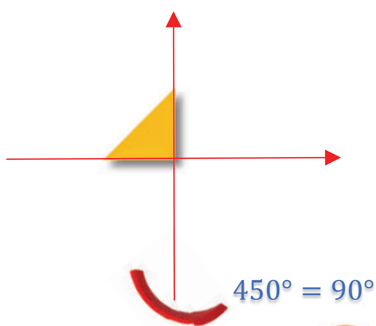
Resolución

Se hace un análisis del movimiento del triángulo dentro del cuadrado, es decir:

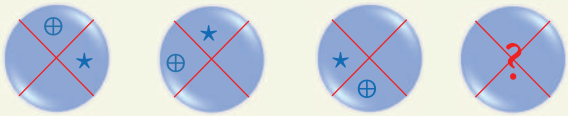


Se están dando giros a partir de 180° grados, aumentando de 90° en 90° grados. Por lo que la quinta figura tendría un giro de 450°= 90°.

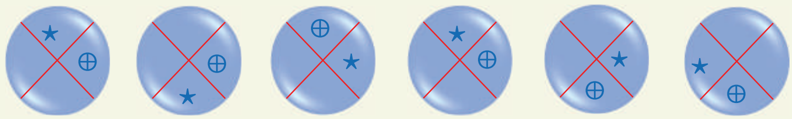
Para las particiones de los triángulos notar que el primero está dividido en 5 partes iguales, el segundo en 4 partes iguales, el tercero en 3 partes iguales y el cuarto en 2 partes iguales. Por tanto, el quinto triangulo deberá estar dividido en una parte igual. Así la quinta figura será:



1758. Buscar la figura que sigue:



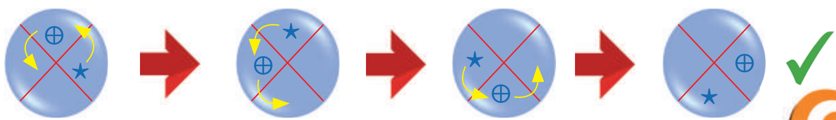
Entre las siguientes figuras:



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

Resolución

En la primera figura se hace mover ⊕ a la izquierda de la región vacía y ⋆ ocupa el lugar de ⊕, para obtener la segunda figura. Se hace el mismo procedimiento en la figura obtenida, es decir:



La figura buscada es el número (2)

1759. ¿Cuál es la figura que completa la serie?

(1) (2) (3) (4) (5)

Resolución

Por la analogía de figuras, en el primer par de figura se observa un círculo y un cuadrado que se parecen entre sí, pues deformando el círculo se forma un cuadrado. Siguiendo la misma analogía, el siguiente par de figuras es una elipse y un rectángulo, es decir:

(4)

1760. ¿Cuál es la figura que completa la serie?

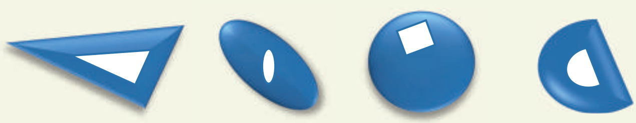
(1) (2) (3) (4) (5)

Resolución

Se observa que las dos primeras figuras, se parecen entre sí, porque un triángulo está circunscrito e inscrito, luego el siguiente par de figuras será un cuadrado circunscrito e inscrito:

(3)

1761. Buscar dos figuras que se relacionen.



(1) (2) (3) (4)

Resolución

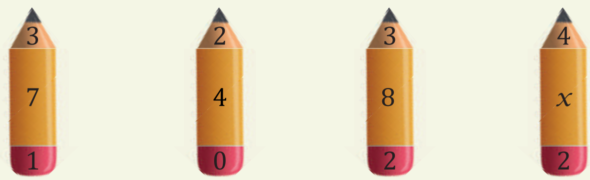
Observe que las figuras son geométricas y se relacionan por su forma interior y exterior son:

(1)

Escuadra y transportador

(4)

1762. Encontrar el valor de $2x$, de la secuencia:



Resolución

Notemos que hay 4 imágenes con la forma de un lápiz, además el resultado de la parte media del lápiz es el doble producto de la punta del lápiz más la parte inferior, es decir:

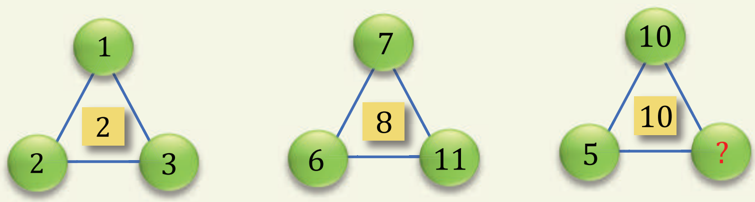
$$\begin{cases} 2(3)+1=7 \\ 2(2)+0=4 \\ 2(3)+2=8 \\ 2(4)+2=x \end{cases}$$

Se quiere encontrar el valor de $2x$, entonces:

$$2(4)+2=x \Longrightarrow 10=x$$
$$\Longrightarrow 2(10)=2x \Longrightarrow 20=2x$$

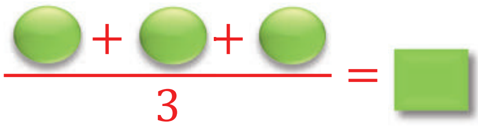
Así el valor de $2x$ es 20.

1763. Mediante un análisis, encontrar el número que falta en la figura:



Resolución

Para este tipo de análisis, se debe tomar en cuenta todas las combinaciones posibles. Para este caso el resultado del medio proviene de la suma de todos los círculos dividida entre la cantidad de círculos, es decir:



$$\begin{cases} \dfrac{1+2+3}{3}=2 \\ \dfrac{7+6+11}{3}=8 \\ \dfrac{10+5+x}{3}=10 \end{cases}$$

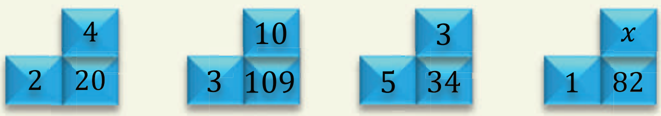
Como se quiere el valor de x se tendrá:

$$\frac{10+5+x}{3}=10 \Longrightarrow 10+5+x=30$$

$$\Longrightarrow x=30-15=15$$

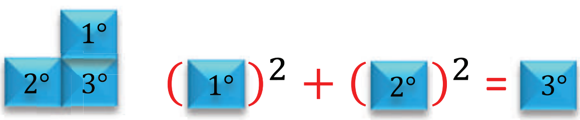
Así el valor en la figura que falta es 15.

1764. Hallar el valor de x, teniendo en cuenta la siguiente secuencia:



Resolución

Distingamos a los cuadrados para hacer un análisis, es decir:



La relación en las figuras es:

$$(2)^2 + (4)^2 = 4 + 16 = 20$$

$$(3)^2 + (10)^2 = 9 + 100 = 109$$

$$(5)^2 + (3)^2 = 25 + 9 = 34$$

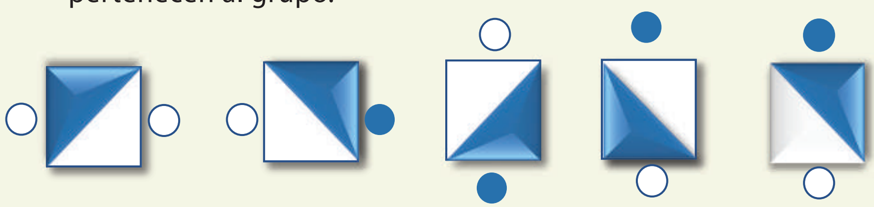
$$(1)^2 + (x)^2 = 1 + x^2 = 82$$

Se necesita el valor de x, por tanto:

$$1 + x^2 = 82 \Longrightarrow x^2 = 81$$

$$\Longrightarrow x = 9 \quad o \quad x = -9$$

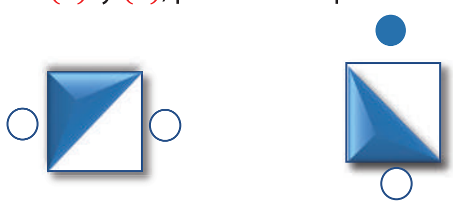
1765. Del grupo de cinco figuras dadas, señale las figuras que no pertenecen al grupo.



(1) (2) (3) (4) (5)

Resolución

Observemos que todas las figuras están acompañadas por círculos blancos, pero cada circulo tiene en frente un triángulo del mismo color. Luego, hay dos figuras que no siguen en su totalidad este patrón que son la figuras (1) y (4), por tanto no pertenecen al grupo:



(1) (4)

1766. Del grupo de cinco figuras dadas señale lo que no pertenece al grupo.

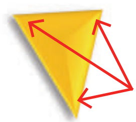
(1) (2) (3) (4) (5)

Resolución

Los triángulos tienen características respecto a sus ángulos, los cuales son rectos y hay un triángulo que no pertenece como la figura:

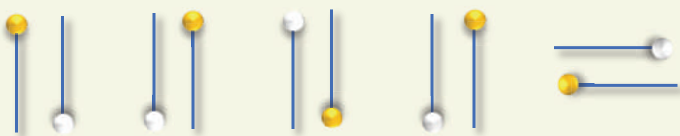
(4)

Razón:



Ángulos agudos

1767. Del grupo de figuras dadas, señala la que no pertenece al grupo.



(1) (2) (3) (4) (5)

Resolución

En el grupo de figuras la mayoría de los palitos están en forma vertical, además cada par tienen sentido opuesto y por certeza la figura (5) no está en el grupo.

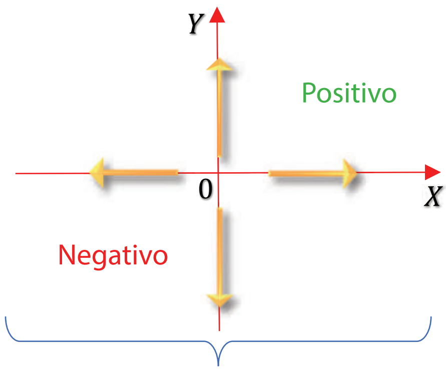
(5)

1768. Indique cuál de las cinco figuras presentadas no corresponde al grupo.

(1) (2) (3) (4) (5)

Resolución

En el grupo de figuras se ven las flechas horizontales y verticales de sentidos contrarios, tiene sentido si las ubicamos en un plano cartesiano, es decir:



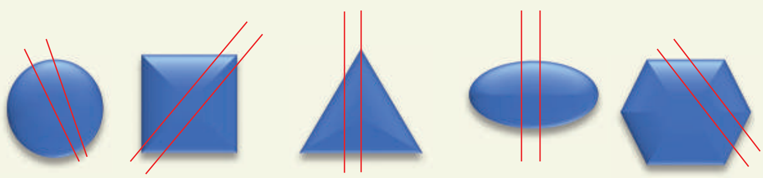
G: Grupo de figuras

 $\notin G$

(no pertenece al grupo de figuras)

Por tanto la figura (2) no pertenece al grupo.

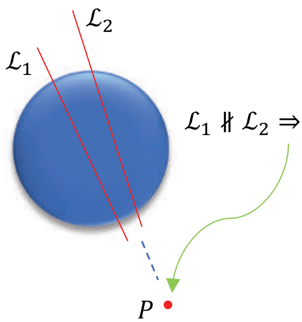
1769. Seleccione la figura que no corresponde con las demás en el conjunto de cinco figuras.



(1) (2) (3) (4) (5)

Resolución

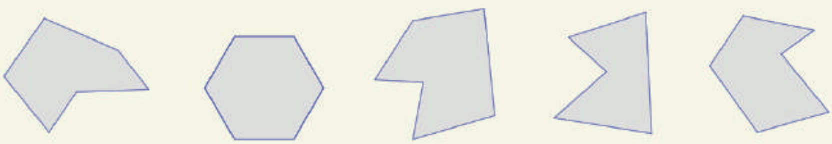
En el grupo de figuras, a cada una la intersectan dos rectas paralelas. De ellas 1 no está en grupo de figuras, porque las rectas no son paralelas:



$\mathcal{L}_1 \nparallel \mathcal{L}_2 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{P\}$

Por tanto la figura (1) no pertenece al grupo.

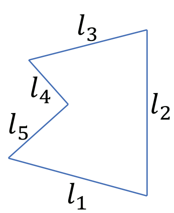
1770. Determine cuál de las figuras, no forma parte del grupo



(1) (2) (3) (4) (5)

Resolución

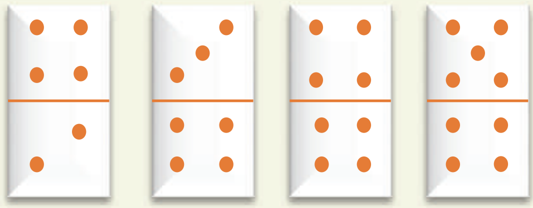
Observe que el grupo de figuras son polígonos de seis lados y uno de ellos tiene cinco lados, es decir:



Polígono de 5 lados

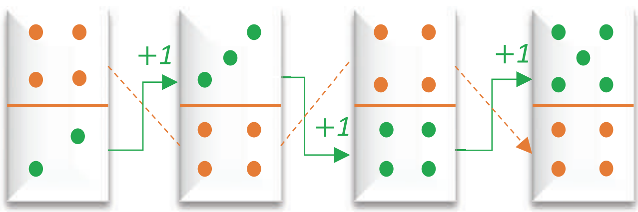
La figura (4) no pertenece al grupo.

1771. ¿Cuál es la figura que sigue en la secuencia?

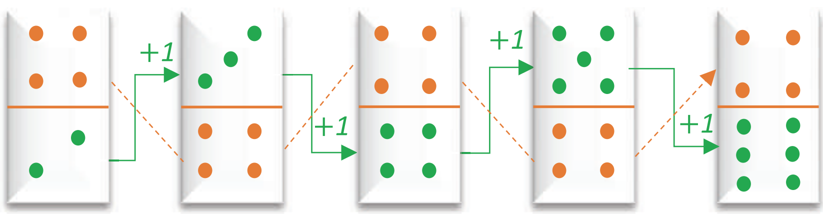


Resolución

Notemos que a partir de la primera figura la parte superior se intercala manteniendo el número 4. Para la parte inferior, a partir de la primera figura va aumentando de 1 en 1, gráficamente se vería así:



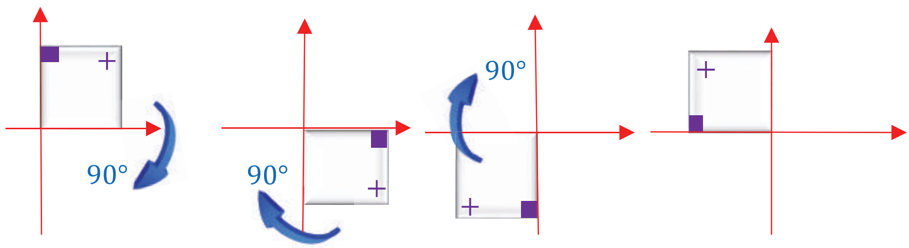
Por tanto, siguiendo ese patrón, la figura que seguiría es:



1772. ¿Qué figura continúa en la secuencia?

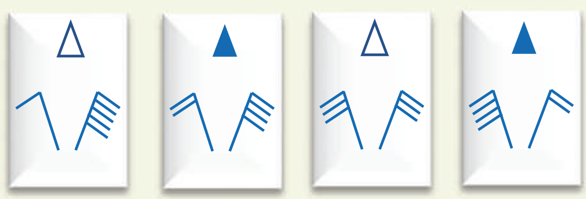
Resolución

Notamos que cada punta de la estrella va pintándose de una en una, por tanto, la quinta figura tendrá pintada las cinco puntas.
Respecto a las formas en las esquinas, estas dan un rote de 90° en cada turno es decir:



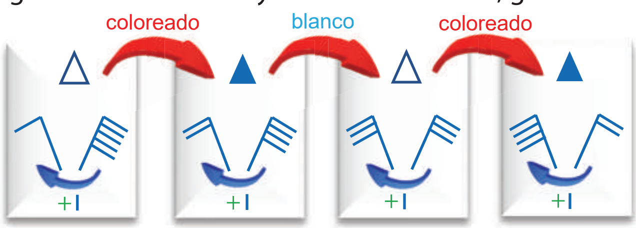
Por tanto, la figura que sigue es:

1773. ¿Cuál es la figura que sigue en la secuencia?



Resolución

Notemos en los triángulos se intercalan, uno vacío y uno coloreado y así sucesivamente, por tanto, la figura que sigue tendría que estar vacía.
Respecto a las figuras, notemos que la primera figura del lado derecho pasa un segmento al otro lado y así sucesivamente, gráficamente:



Por tanto, la figura que sigue es:

1774. ¿Cuál es la figura que está demás?

1°　2°　3°　4°　5°

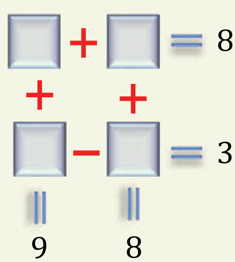
Resolución

Todas las figuras constan de un circulo, por tanto, se debe analizar la secuencia dentro de los círculos.

El primer círculo consta de 2 segmentos, el cuarto círculo consta de 3 segmentos, el segundo círculo consta de 4 segmentos, el quinto círculo consta de 5 segmentos. El tercer círculo consta de 9 segmentos, que está rompiendo la secuencia.

De este modo, el tercer círculo no pertenece a las figuras.

1775. En el siguiente diagrama, ¿cuánto vale cada cuadrado?



Resolución

Consideremos cuatro posibles números 3, 4, 5, 6. Si nos concentramos en las filas y columnas:

Filas
En la primera fila, las posibilidades que puede tomar son:
$4 + 4 = 8$ ó bien $3 + 5 = 8$
Luego, en la segunda fila, la única posibilidad es:
$6 - 3 = 3$

Columnas:
En la primera columna, las posibilidades que puede tomar son:
$4 + 5 = 9$ ó bien $6 + 3 = 8$
Ahora en la segunda columna:
$4 + 4 = 8$ ó bien $5 + 3 = 8$

De ahí que se cumple: filas (3, 5); (6, 3) y columnas (3, 6); (5, 3). Es decir:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{3} & + & \boxed{5} & = & 8 \\ + & & + & & \\ \boxed{6} & - & \boxed{3} & = & 3 \\ \| & & \| & & \\ 9 & & 8 & & \end{array}$$

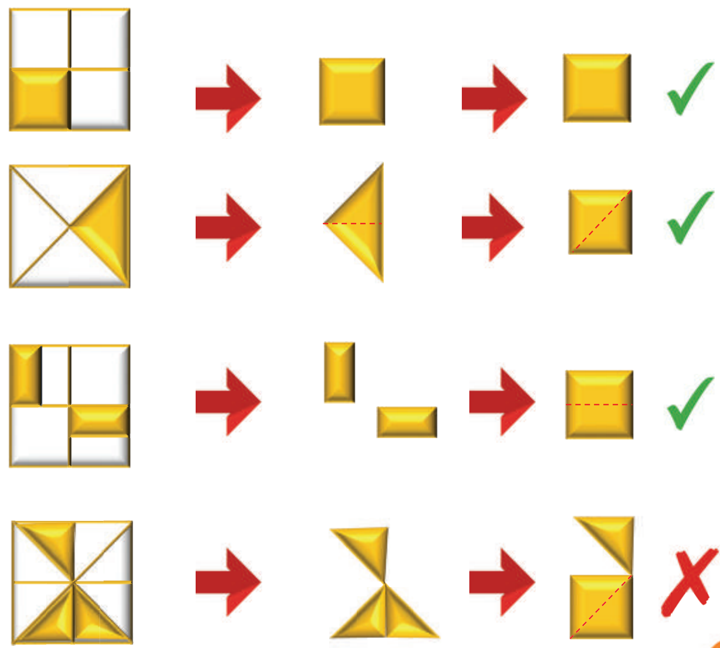
Por tanto, los cuadrados valen:
3, 5, 6 y 3.

1776. ¿Cuál de las siguientes no tiene relación con las otras figuras?

Resolución

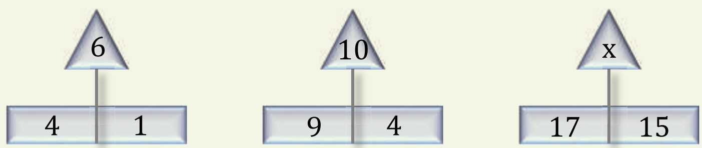
Notar que la primera figura tiene un cuadrado coloreado, la segunda tiene un triángulo que se puede convertir en un cuadrado, la tercera tiene dos rectángulos con los que se puede formar un cuadrado, pero la última figura tiene tres triángulos con los que se puede formar un cuadrado y sobra una pieza, así:

Básico 01



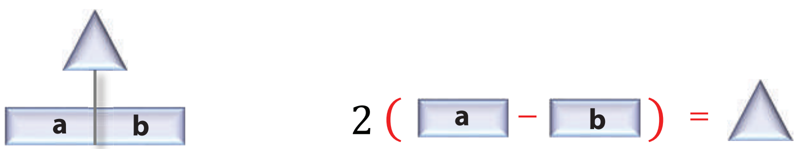
Por tanto la última figura no tiene relación con las otras.

1777. ¿Cuánto vale x, siguiendo las graficas?



Resolución

Se puede deducir la siguiente relación:



Es decir:

$$2(4-1)=2\cdot 3=6$$
$$2(9-4)=2\cdot 5=10$$
$$2(17-15)=2\cdot 2=4=x$$

Así el valor de x es 4.

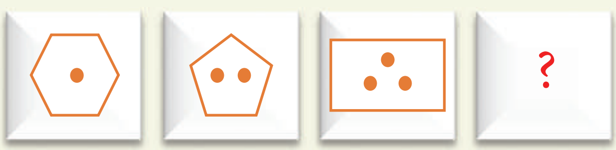
1778. Existe una conexión entre las dos primeras figuras. De las opciones restantes, escoger la que tenga una relación similar con la tercera figura.

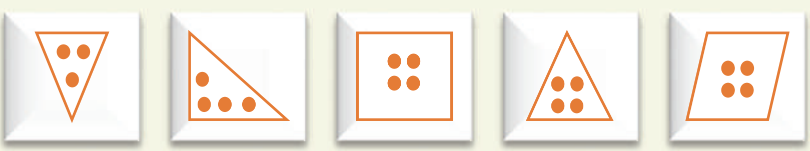
Resolución

La primera figura son dos círculos que se intersectan en 2 puntos, y si se intersectan en cada punto formarían un solo círculo. Siguiendo esa relación la tercera figura son 2 triangulos, se intersectan en 2 puntos y si se intersectan en cada punto formarían la figura:

Así el triángulo tiene una relación con la tercera figura.

1779. Siguiendo la secuencia, hallar la figura que sigue en:





A *B* *C* *D* *E*

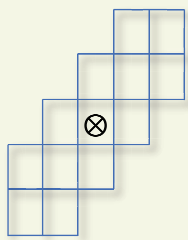
Resolución

Notemos que los puntos en la secuencia, están en figuras que según sus lados van decayendo, es decir, en la primera figura está en un hexágono, la segunda figura esta en un pentágono, y la tercer figura está en un cuadrado, por tanto la cuarta figura deberá ser una con 3 lados, que podrían ser el inciso B y D.

Las figuras 2 y 3 van aumentando en un punto según la figura 1, 2 y 3 pero tienen una base de dos puntos, siguiendo ese patrón la figura que sigue seria la D, pues tiene una base de dos puntos.

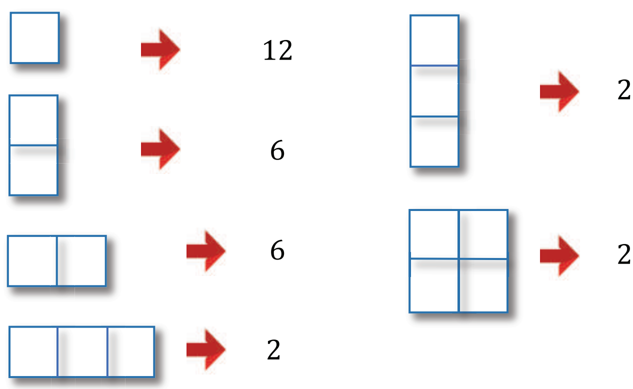
La figura que sigue es la D.

1780. En la figura dada, ¿cuántos cuadriláteros no contienen ⊗?



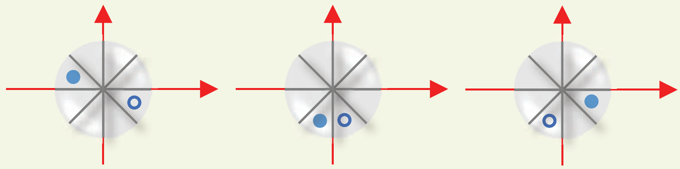
Resolución

Descomponiendo y contando los cuadriláteros de lado 1×1, 1×2, 2×1, 3×1, 1×3 y 2×2.



Sumando, hay 30 cuadriláteros que no contienen ⊗.

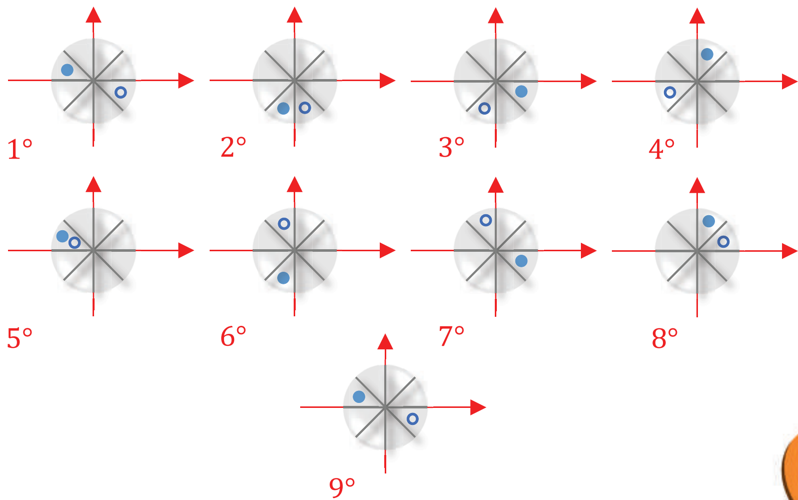
1781. Sean las figuras:



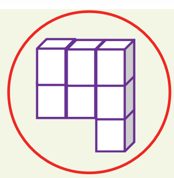
¿En qué número de figura se repite la primera figura ?

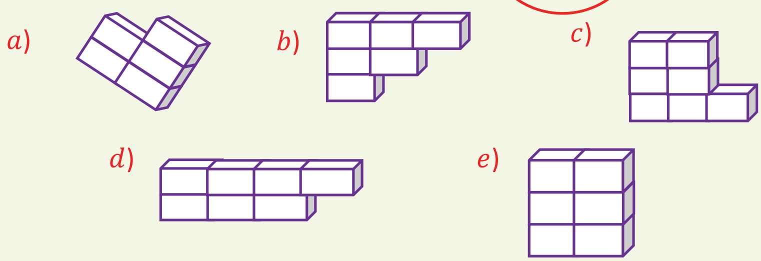
Resolución

Se puede ver que el círculo pintado se mueve en dos casillas hacia la derecha, mientras que el círculo de fondo blanco se mueve una casilla hacia la izquierda. Por tanto para volver a ver la misma figura, depende del punto de fondo blanco, pues tendría que dar toda una vuelta para volver a su lugar que sería en la figura número 9, es decir:



1782. Entre las figuras dadas, ¿cuál es igual a la siguiente figura?





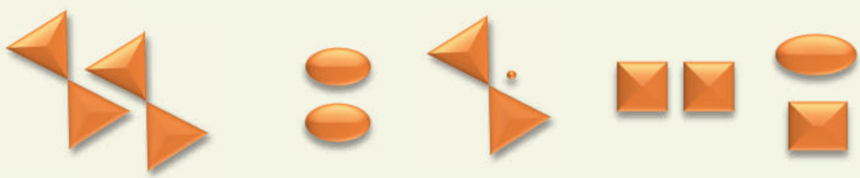
Resolución

Notemos que la figura inicial tendría un total de 7 cubos, por tanto las opciones *a, b* y *e* están descartadas, pues tienen menos de 7 cubos.

La opción original tendría una base de 3 y una altura de 3 cubos, pero la opción *d* tiene una base de 4 cubos y una altura de 2 cubos, que no tiene similitud con la figura original, tendrá la misma cantidad de cubos, pero no la misma forma.

Así la opción *c* es la que es la misma figura que la figura original.

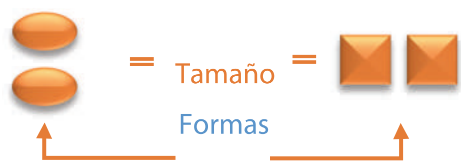
1783. Buscar dos figuras que se relacionen.



(1) (2) (3) (4) (5)

Resolución

Encontramos que las figuras que tienen la misma forma y tamaño son (2) y (4):



1784. Buscar la figura que se asemeje con la primera.

(1) (2) (3) (4) (5)

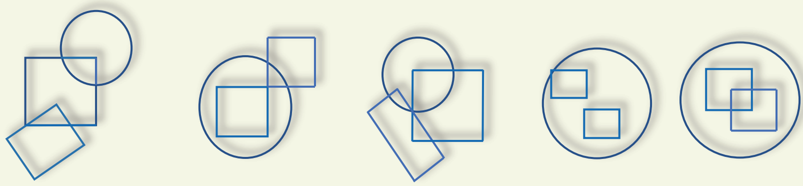
Resolución

Dos figuras son semejantes, si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Buscamos las figuras geométricas semejantes a la primera, así (3) se asemeja a (1).

Circunferencia inscrita en un triangulo | Circunferencia circunscrita en un triangulo

Donde: P_1, P_2 y P_3 son puntos de intersección.

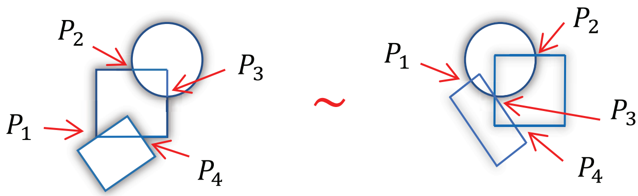
1785. Identifica la figura que se parezca a la primera.



(1) (2) (3) (4) (5)

Resolución

(3) se asemeja a (1) y además se intersectan en cuatro puntos:



1786. Calcula el valor de cada ícono para que tenga sentido.

■ + 9 = ★

★ − 3 = ●

● + 1 = ▲

★ − 7 = 3

Resolución

En la última igualdad, si sumamos 7 se obtendrá el valor del icono estrella, es decir:

★ − 7 = 3 ➔ ★ − 7 + 7 = 3 + 7

➔ ★ = 10

Como el ícono estrella es 10, entonces en la primera y segunda igualdad se obtiene:

■ = 1 ● = 7

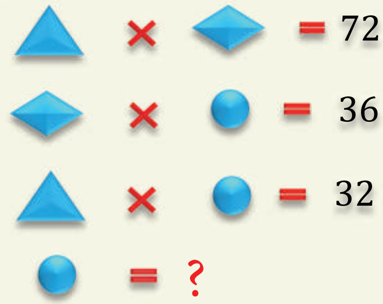
como el ícono círculo es 13, en la tercera igualdad se obtiene:

▲ = 8

Por tanto, el valor de cada ícono es:

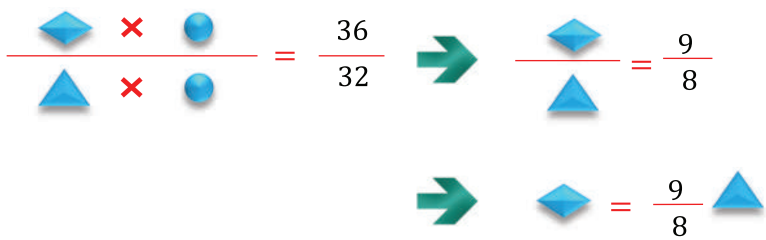
Cuadrado: 1
Estrella: 10
Circulo: 7
Triangulo: 8

1787. En el siguiente diagrama, ¿cuánto vale figura del círculo, para valores positivos?



Resolución

Dividiendo las igualdades que tienen círculo:



El triángulo vale 8, luego en la tercera igualdad se obtiene el valor del círculo:

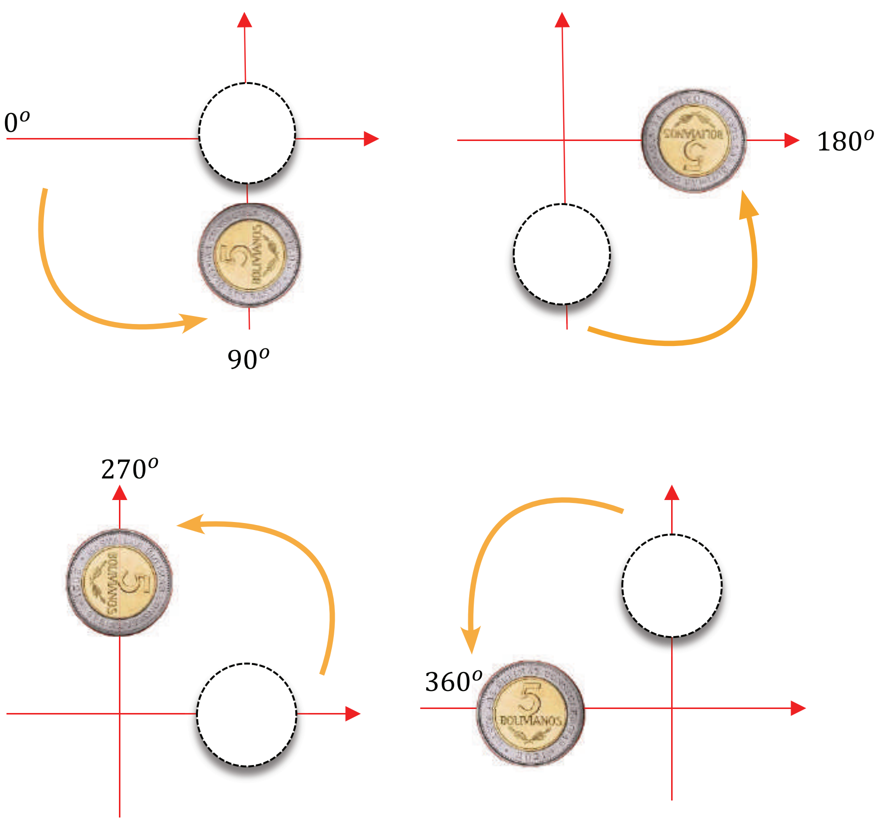
Por tanto, la figura del circulo vale 4.

Básico 01

1788. ¿Cuántas vueltas dará una moneda de 5 bolivianos hasta llegar a su posición inicial?

Resolución

Si hacemos girar la moneda en sentido antihorario:



$$1 \text{ vuelta} = 360^o$$

Por tanto, la moneda de 5 bolvianos da una vuelta.

1789. ¿Cuántas monedas se tendrá que mover como mínimo para pasar de la figura *I* a la figura *II* ?

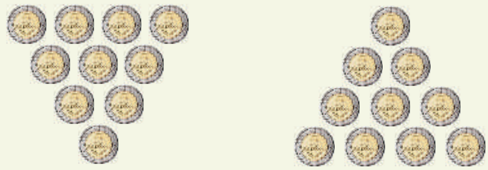


Figura (*I*) Figura (*II*)

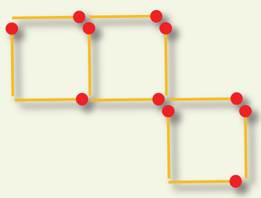
Resolución

Si vamos con el caso tradicional de hacer la prueba moviendo una moneda, luego dos monedas, luego tres y así sucesivamente, sería algo extenso.

Como las monedas forman un triángulo equilátero se puede aprovechar eso, moviendo solo tres monedas, las puntas de cada lado, a sus lados opuestos, es decir:

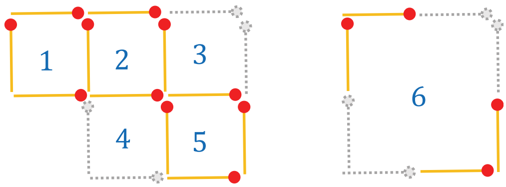
Así el mínimo será mover 3 monedas.

1790. ¿Cuantos palitos de fósforo se deben agregar como mínimo para formar seis cuadrados?



Resolución

En este caso no hay que dejarse guiar por la simetría de los cuadrados, sino en formar la figura, es decir:



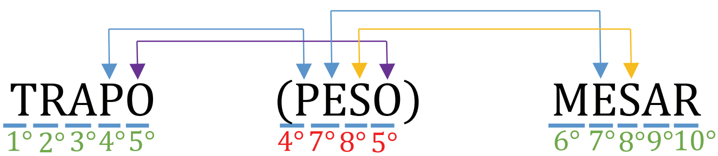
Así aumentando 4 palitos de fósforo se pueden formar 6 cuadrados.

1791. ¿Cuál es la palabra que falta?

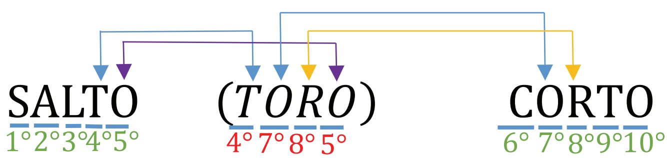
TRAPO	(*PESO*)	MESAR
SALTO	( )	CORTO

Resolución

Teniendo de referencia las primeras 3 palabras, recabamos datos, es decir:



Dándole un orden a cada letra de las palabras, en los extremos se forma la palabra del medio. Siguiendo este patrón, en la segunda fila de palabras se formaría:



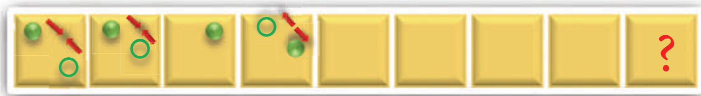
Así la palabra que sigue es TORO.

1792. Con base en las figuras iniciales, elija entre las opciones disponibles las que continúen la secuencia.

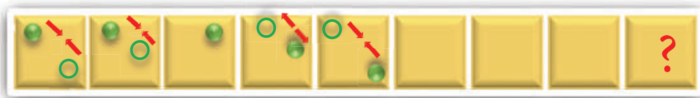
A *B* *C* D *E*

Resolución

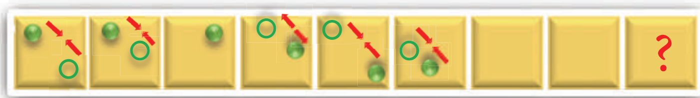
Las primeras figuras indican que los puntos se están acercando, en el tercer movimiento se intersectan y luego se alejan, para luego volverse a acercar, es decir:



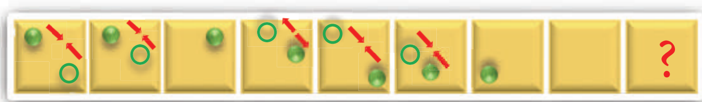
Se irán alejando, es decir:



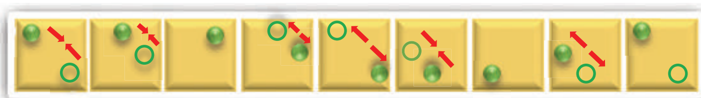
Se volverán a acercar, es decir:



Se intersectan, es decir:



Se alejan de nuevo, siguiendo este patrón se tendrá:



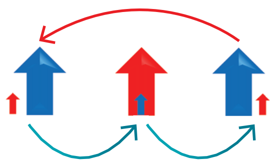
Por tanto la opción *B* es la que se busca.

1793. Tomando como referencia las figuras iniciales, escoja entre las opciones las que extiendan la secuencia.

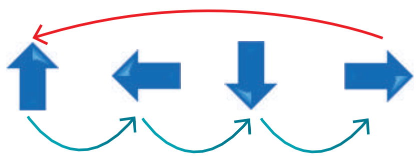
A *B* *C* *D* *E*

Resolución

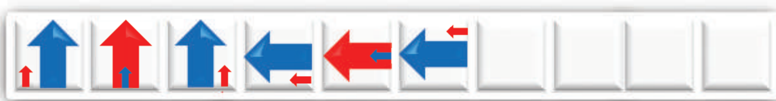
Notar que las flechas siguen antes de girar, siguen este patrón:



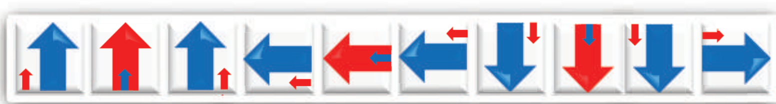
Luego gira al lado izquierdo, es decir:



Siguiendo este patrón se tendrá:

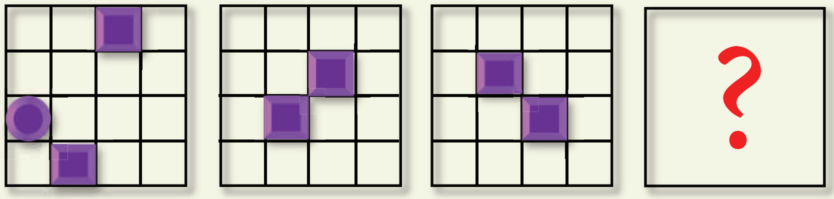


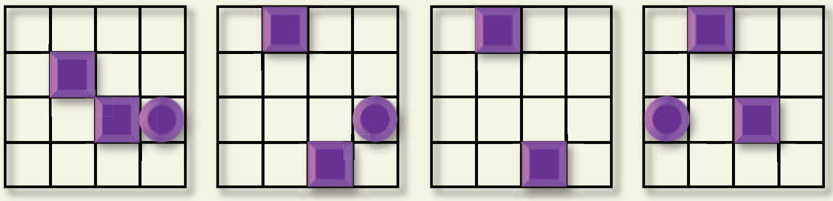
Girando y siguiendo el mismo patrón se tendrá:



Así el inciso E, completa la secuencia.

1794. Utilizando las figuras iniciales como guía, elija entre las alternativas las que den continuidad a la secuencia.

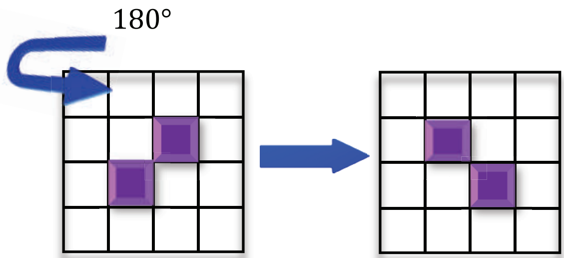




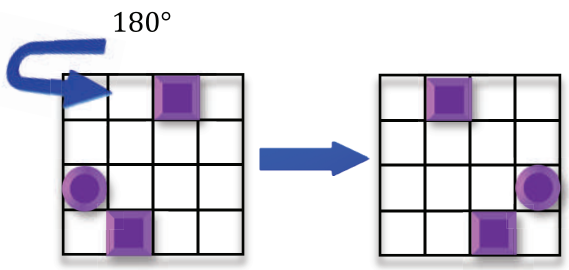
A *B* *C* *D*

Resolución

Las primeras 2 figuras no siguen un patrón notorio, pero la figura 3 es la imagen simétrica de la figura 2, es decir:

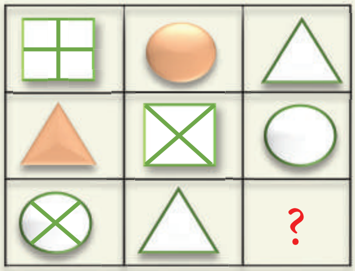


Siguiendo esa lógica, la figura 4 deberia ser la simétrica de la figura 1, es decir:



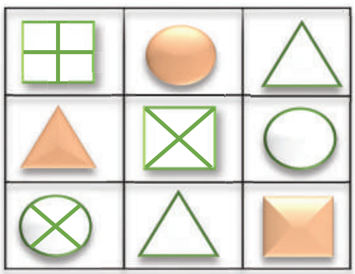
Por tanto el inciso *B* es la figura que completa el cuadrado.

1795. En el siguiente arreglo rectangular de figuras, ¿cuál es la figura que falta?



Resolución

Se observa que en cada fila y en cada columna hay un cuadrado y un triángulo, además tiene que haber uno totalmente coloreado, de modo que el espacio faltante corresponde asignarle a:

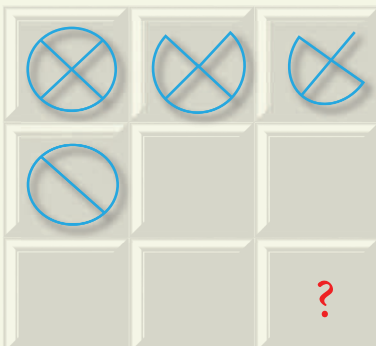


1796. Para la siguiente matriz gráfica, ¿cuál es la figura que corresponde a completar la celda media?

Resolución

Indagando sobre las figuras, notamos que podrían representar rostros con tres estados de ánimo. En cada "rostro" notamos que en cada fila corresponde "feliz", "triste" y "serio"; y las figuras que varían en los ojos, corresponden a "cuadrado-redondo", "redondo-cuadrado" y "redondo-redondo". Por tanto, en la celda del medio corresponde:

1797. Completar la siguiente matriz de gráficas, para conocer la figura que corresponde a la casilla marcada con signo de interrogación.



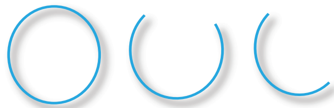
Resolución

Se observa el siguiente comportamiento en las filas de la matriz:
Fila 1:

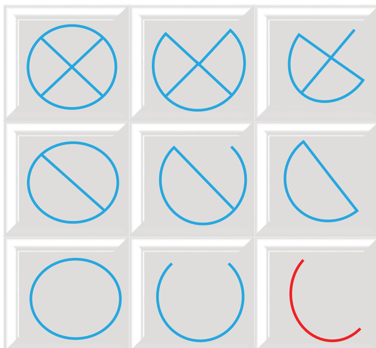
Básico 01

Fila 2:

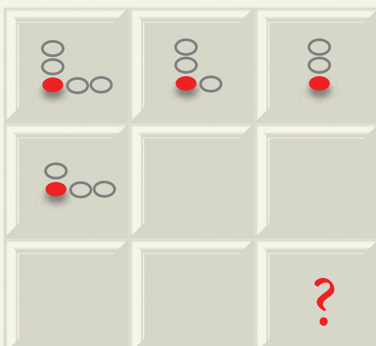
Fila 3:



La matriz de figuras completada es:



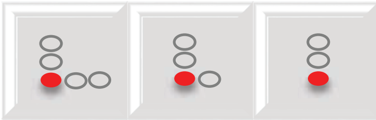
1798. Para la siguiente matriz de figuras, completar los espacios en blanco y encontrar el elemento correspondiente al marcado por el signo de interrogación.



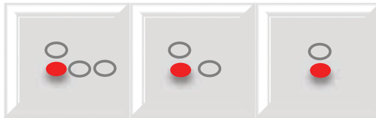
Resolución

En las filas de la matriz, se observa el siguiente comportamiento:

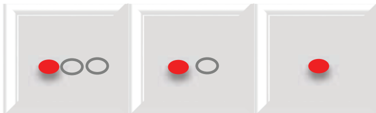
Fila 1:



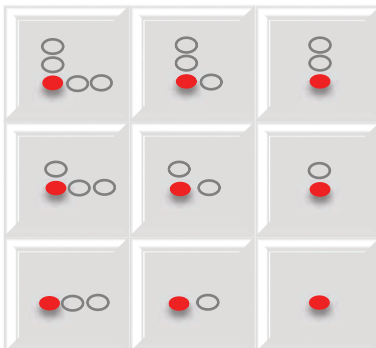
Fila 2:



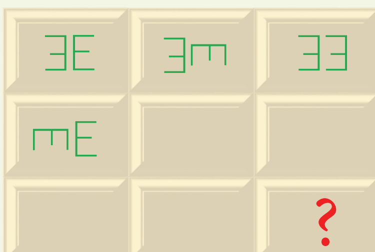
Fila 3:



Agrupando las filas en orden, obtenemos la matriz completada como sigue:



1799. ¿Qué elementos corresponden a las casillas en blanco y a la casilla marcada con la interrogación?

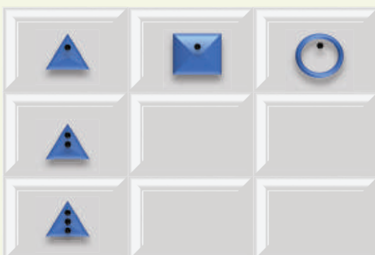


Resolución

Notemos que en las filas los elementos que rotan en sentido horario son los de la derecha y los que rotan en sentido anti horario son los de la izquierda.

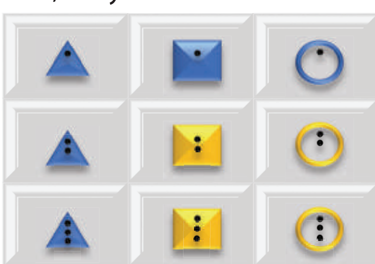
Con esta información, podemos completar la matriz.

1800. Para la siguiente matriz de figuras, completar los espacios en blanco y encontrar el elemento correspondiente al marcado por el signo de interrogación.



Resolución

Se observa el siguiente patrón en las columnas, cada figura geométrica contiene en su interior un, dos y tres círculos coloreados, respectivamente.



Razonamiento numérico y geométrico

1801. Si a es amigo de b y b es amigo de c, ¿podemos concluir que a es amigo de c?

Resolución

No podemos concluir que a es amigo de c, los amigos de mis amigos no son necesariamente mis amigos también, pues en casos no puede haber una relación directa entre a y c.

Respuesta

No se puede concluir algo concreto de a y c.

1802. Tenemos una caja fuerte que se abre con 4 dígitos distintos, solo sabemos que estos números son primos, que al sumar todos los dígitos nos queda 17 y que la clave está en orden ascendente.

Resolución

Como la clave tiene que ser ascendente, entonces los números primos tienen que ser distintos. Ahora veamos cuántos números primos hay entre 0 al 9. Los posibles casos son:

$$2, 3, 5, 7$$

Si 2 es el primer número y el siguiente tiene que ser mayor, así sucesivamente se tendrá:

$$2+3+5+7=17$$

Respuesta

La clave es: 2357

1803. Tenemos a dos personas en frente, A y B, una siempre miente y la otra siempre dice la verdad. Queremos saber cuál es cuál y solo podemos hacer una pregunta que ambas personas responderán a la vez, ¿qué deberíamos preguntar?

Resolución

Si preguntamos quién dice la verdad, A nos dirá que A y B nos dirá que B, no sirve esta pregunta, pues seguiremos sin saber quién es quién.
Podemos hacer una pregunta acerca de la otra persona, por ejemplo, si le pregunto a tu compañero si es mentiroso, ¿qué me contestará?
El que dice la verdad dirá la verdad sobre su compañero mentiroso, “te dirá que no es el mentiroso”.
El que miente dirá una mentira sobre su compañero honesto, “te dirá que sí es el mentiroso”
Ya sabemos las respuestas del que miente y del que dice la verdad.

Respuesta

Deberíamos preguntar sobre la respuesta que dará su compañero al preguntar si es el mentiroso.

1804. Pablo tiene 6 billetes de diferentes cortes, cuya suma hace un total de Bs 350. Si cinco de los billetes son de Bs 50, ¿de qué corte es el sexto billete?

Resolución

Sabiendo que 5 de los billetes son de Bs 50, su valor total es:

$$5 \cdot 50 = 250$$

Bs 250. Luego 350-250=100.

Respuesta

El corte del billete restante es de Bs 100, cuyo valor sumado da el total de Bs 350.

1805. Marco planta 10 árboles cada tres minutos. Si continúa plantando al mismo ritmo, cuántas horas le tomaría plantar 2500 árboles?

Resolución

Por regla de tres simple:

10 árboles → 3 min

25 árboles → y

$$y = \frac{2500 \text{ árboles} \cdot 3 \text{ min}}{10 \text{ árboles}} = 750 \text{ min}$$

Por tanto, son 750 minutos los que le tomaría plantar 2500 árboles. Convirtiendo los minutos en horas:

$$750 \text{ min} \cdot \frac{1 \text{ hora}}{60 \text{ min}} = \frac{25}{2} \text{ horas} = 12{,}5 \text{ horas}$$

Respuesta

Con ese ritmo, a Marco le tomaría 12 horas y 30 minutos en plantar 2500 árboles.

1806. Sean tres personas A, B y C con tres edades distintas 10, 12 y 15 años respectivamente. No sabemos quién es quién y queremos averiguarlo mediante las siguientes pistas:

Pista 1: B le dice al que tiene 12 años que no sabe el nombre del de 15 años.
Pista 2: El que tiene 12 años saluda siempre a C con un abrazo.
¿Qué edades tienen A, B y C respectivamente?

Resolución

Analicemos la pista 1: B le habla al de 12 años sobre el de 15 años, como B pregunta por el que tiene 12 y 15 años, esto quiere decir que B no tiene 12 años ni 15 años, así B tiene que ser quién tiene 10 años.
Analicemos la pista 2: el que tiene 12 años saluda a C con un abrazo, entonces C no tiene 12 años.
Por el análisis anterior B habla con el de 12 años, que podrían ser A o C, pero como C no tiene 12 años entonces B habla con A que, tendría 12 años.
Así, no le quedaría más la opción a C de tener 15 años.

Respuesta

A tiene 12 años, B tiene 10 años y C tiene 15 años.

1807. Juana necesita enumerar su carpeta de apuntes. Si su carpeta contiene 70 páginas, ¿cuántas veces aparece en la numeración el número 3?

Resolución

Se asume que Juana tiene que enumerar todas las páginas desde la primera, empezando de 1.

Enumeramos las primeras 10 páginas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y notamos que aparece el 3 solo una vez.

Cuando lleguemos a la página 29, tendremos:
30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39
11 apariciones del número 3.
En las demás, el 3 aparecerá cinco veces más (13, 23, 43, 53, 63).

Respuesta
En total hay 17 apariciones del número 3 en la numeración.

1808. Cuando son las 5 pm en Teherán, son las 3 pm en Viena y son las 9 am del mismo día en La Paz. Wara vive en La Paz y se fue a dormir a las 9 pm del domingo, ¿qué hora y que día era en Teherán en ése momento?

Resolución

Desde las 9 am hasta las 9 pm habrán pasado 12 horas; es decir, en Teherán pasadas 7 horas, ya será medianoche del domingo y pasadas 5 horas más, serán las 5 de la madrugada del día siguiente.

Respuesta
En Teherán eran las 5 am del día lunes, cuando Wara se fue a dormir el domingo a las 9 pm.

1809. ¿Qué día precede al viernes de la misma forma que sigue al lunes?

Resolución

Veamos el orden de la semana:

Lunes | Martes | Miércoles | Jueves | Viernes

Sábado | Domingo

El jueves precede al viernes y el martes sigue al lunes, entonces el día miércoles está a la misma distancia hablando de días entre el lunes y martes.

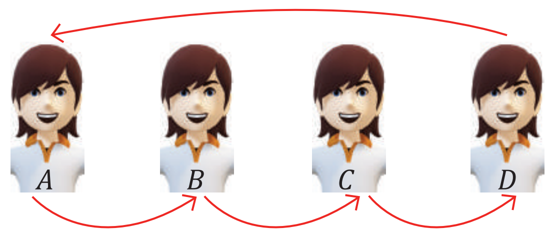
Respuesta

El día miércoles

1810. Hay 10 balones de fútbol y 4 hermanos. Cada hermano puede escoger un balón por turno. Acordaron comenzar a escoger los balones por el menor e ir en orden de edad, cuando se termine una vuelta se empieza una por el menor nuevamente. ¿Cuántos balones tendrá el hermano mayor y el hermano menor?

Resolución

Sea A el hermano menor, B el siguiente, C el siguiente y D el mayor.



Todos tendrán dos balones al final de la segunda vuelta. Como se habrán tomado 8 balones en total, sobran dos. A y B toman los últimos balones. Entonces A tendrá 3 balones y D tendrá 2 balones.

Respuesta

El mayor tiene 2 balones y el menor 3 balones.

1811. Andrea tiene una caja con 20 dulces. Si consume 3 dulces diarios, pero agrega 1 dulce nuevo a la caja cada día, ¿cuántos días transcurrirán antes de que la caja quede vacía?

Resolución

Cada día comes 3 dulces, pero añades 1 dulce, entonces al final del día la caja disminuye en 2 dulces.

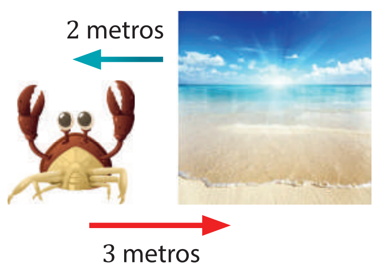
El primer día la caja tendrá 20 - 2 = 18 dulces
El segundo día la caja tendrá 18 - 2 = 16 dulces
Ultimo día la caja tendrá 2 - 2 = 0 dulces
Como disminuye de 2 en 2, ¿cuántos números pares hay entre 20 y 2?
Habrían 10 números pares entre 20 y 2.

Respuesta
En 10 días la caja quedaría vacía.

1812. Un cangrejo realiza un recorrido en línea recta, partiendo desde su guarida en la playa hasta el mar, avanzando 3 metros y retrocediendo 2 metros para luego descansar y seguir avanzando. Si el mar está a 30 metros desde su guarida, ¿cuántas veces se detuvo el cangrejo antes de tomar contacto con el mar?

Resolución

Al avanzar los primeros 3 metros de su guarida, el cangrejo descansa a 1 metros de la misma.
A partir del descanso, avanza hasta llegar a 4 metros y retrocede 2 metros, descansando a 2 metros de su guarida.
Al avanzar hasta un metro antes de la playa, retrocede y descansa a 27 metros de su guarida, para luego avanzar 3 metros y llegar al agua.



Respuesta
El cangrejo se detuvo 27 veces.

1813. Si D representa el número 10, ¿qué letra falta en la siguiente secuencia?

D O D T C Q D D D D ?

Resolución

Lo aconsejable en este tipo de secuencias, es encontrar una relación con algo que ya se conoce, para este paso se tiene la siguiente relación: Se asociará a los números naturales desde el diez, como:

D	O	D	T	C	Q	D	D	D	D	V
i	n	o	r	a	u	i	i	i	i	e
e	c	c	e	t	i	e	e	e	e	i
z	e	e	c	o	n	c	c	c	c	n
			e	r	c	i	i	i	i	t
				c	e	s	s	o	n	e
				e		é	i	c	u	
						i	e	h	e	
						s	t	o	v	
							e		e	

Respuesta

La letra que sigue es la V.

1814. Cuál de las siguientes palabras no corresponde a:

a) Casa b) Plato c) Tenedor d) Silla e) Mesa

Resolución

Notemos que las palabras plato, tenedor, silla y mesa pertenecen a los elementos que existen en una casa, por tanto la palabra casa no es un elemento del conteo, más al contrario, la palabra casa seria el conjunto A que contiene a todas las palabras.

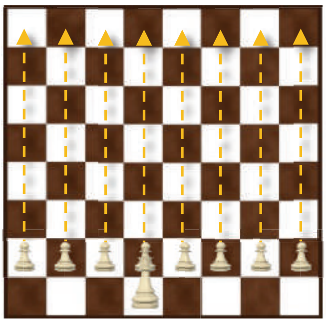
Respuesta

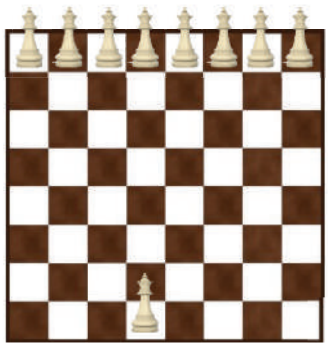
La palabra casa, no pertenece al grupo de palabras.

1815. En un juego de ajedrez entre dos personas, ¿cuántas reinas como máximo puede llegar a tener un jugador?

Resolución

Teniendo en cuenta que, si la ficha del peón llega al extremo del rival, se puede reclamar entre una dama, un caballo, un alfil y una torre. Así en el mayor de los casos, si no se come ningún peón y todos llegan al otro extremo, se podrían tener hasta 9 reinas, incluyendo la reina que se tiene, se vería así:





Respuesta

Se puede obtener como máximo 9 reinas.

1816. ¿Qué día caerá en 30 días desde hoy, si hoy fuese domingo?

Resolución

Si hacemos una correspondencia numérica a los días de la semana:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
1	2	3	4	5	6	7

Como hoy es domingo, le corresponde al número 7 y el otro domingo correspondería al número 14, esto es múltiplos de 7, es decir:

$1 \cdot 7 = 7 \longleftarrow$ 1er. domingo

$2 \cdot 7 = 14 \longleftarrow$ 2do. domingo

$3 \cdot 7 = 21 \longleftarrow$ 3er. domingo

$4 \cdot 7 = 28 \longleftarrow$ 4to. domingo

Si tenemos 30 días, entonces el lunes sería el día 29 y martes día 30, luego según la correspondencia, se tendría:

Lun.	Mar.	Miérc.	Juev.	Vier.	Sáb.	Dom.	Lun.	Mar.
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
29	30	1	2	3	4	5	6	7

Respuesta

En 30 días será martes.

1817. En una caja oscura hay 3 dados rojos, 4 dados azules y 6 dados amarillos, ¿cuántos dados como mínimo necesitamos sacar para garantizar que obtenemos al menos un dado rojo?

Resolución

Hay 13 dados en total, si sacamos solo un dado este podría ser azul o amarillo, no necesariamente rojo, si sacamos 4 dados podrían ser algunos azules y otros amarillos, no necesariamente rojo.

Si sacamos $4 + 6 = 10$, en el peor de los casos habremos sacado justamente los 4 azules y los 6 amarillos. Sacando uno más, tendremos de forma segura un dado rojo.

Respuesta

Se necesita sacar 11 dados mínimamente.

1818. En un experimento acerca del cultivo de bacterias, los estudiantes observan por microscopio que solo una de ellas incrementa su número partiéndose en dos, pasada una hora. Sabiendo que al cabo de un día una de ellas puede llenar el frasco, ¿cuánto tardarían en llenar el frasco si se empieza con 2 bacterias?

Resolución

Es conveniente elaborar tablas para organizar las cantidades de bacterias en el tiempo:

Para el frasco con una bacteria:

Hora	Cantidad
0	$1 = 2^0$
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
4	$16 = 2^4$
$\vdots$	$\vdots$
23	2^{23}
24	2^{24}

habrá 2^{24} bacterias.

Para el frasco con dos bacterias:

Hora	Cantidad
0	$2 = 2^1$
1	$4 = 2^2$
2	$8 = 2^3$
3	$16 = 2^4$
4	$32 = 2^5$
$\vdots$	$\vdots$
23	$2\ 2^{23+1} = 2^{24}$

habrá 2^{24} bacterias.

Respuesta

Se tarda 23 horas en llenar el frasco, empezando con 2 bacterias.

1819. Tienes 3 tareas: A, B y C y solo puedes realizar dos tareas en un día, mientras que la tercera tarea tomará 3 días. Si debes realizar las tareas en orden alfabético, ¿cuál es la mejor combinación de realizar tareas para minimizar el tiempo total?

Resolución

Consideremos todas las combinaciones posibles
Si el primer día se hacen las tareas A y B, y el segundo día la tarea C que dura 3 dias, se tardaría un total de 4 días.
Si el primer día se hacen las tareas A y C, y el segundo día la tarea B que dura 3 días, así se tardaría un total de 4 días.
Si el primer día se hacen las tareas B y C, y el segundo día la tarea A que dura 3 días, así se tardaría un total de 4 días.
Las tres combinaciones tienen el mismo tiempo, pero como nos piden en orden alfabético, la mejor combinación es hacer las tareas A, B y C.

Respuesta

La combinación A, B y C.

1820. El gato de Carlos pasa $\frac{1}{2}$ del día durmiendo, $\frac{1}{3}$ del día jugando y $\frac{1}{8}$ del día comiendo, ¿cuánto tiempo del día pasa desapercibido por Carlos?

Resolución

La cantidad de horas que hacen un día es igual a 24.
La fracción $\frac{1}{2}$ representa $\frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ horas (la mitad del día el gato se la pasa durmiendo).
La fracció $\frac{1}{3}$ representa $\frac{1}{3} \cdot 24 = 8$ horas (la tercera parte del día el gato se la pasa jugando).
La fracción $\frac{1}{8}$ representa $\frac{1}{8} \cdot 24 = 3$ horas (la octava parte del día el gato se la pasa comiendo).
Luego el tiempo restante es:
$24 - (12 + 8 + 3) = 24 - 23 = 1$

Respuesta

El gato pasa desapercibido por Carlos, durante 1 hora.

1821. Si Juan dice "estoy mintiendo", ¿esta afirmación es verdadera o falsa? Explica tu razonamiento.

Resolución

La paradoja del mentiroso:

Si la afirmación fuera verdadera, "estoy mintiendo", Juan estaría mintiendo realmente, entonces su afirmación sería una mentira, es decir falsa también. Pero es una contradicción ya que una afirmación no puede ser verdadera y falsa a la vez.

Si la afirmación fuera falsa, Juan no estaría mintiendo, entonces dice la verdad al decir "estoy mintiendo", luego Juan está mintiendo también. Pero si está diciendo la verdad entonces su afirmación "estoy mintiendo" es verdadera, con lo que es nuevamente una contradicción.

Respuesta

Esta afirmación no es ni verdadera ni falsa, asumir ambas nos lleva a una contradicción.

1822. En la tabla se muestra una sucesión de números que comienza con el 3 en la esquina superior izquierda. En cada fila, cada cuadro se llena con un número más grande en 7 que el número de su izquierda. A partir de la segunda fila, el primer número de la izquierda en cada fila es más grande en 7 que el número más grande de la fila anterior. Cuando todos los cuadros estén llenos, ¿cuál es el valor de n?

3	10	17	24	31
38	45	52	59	66
73				
				n

Resolución

Se procede a llenar la tabla con las condiciones del problema:

3	10	17	24	31
38	45	52	59	66
73	80	87	94	101
108	115	122	129	136
143	150	157	164	n

Luego, $n = 164 + 7 = 171$.

Respuesta

El valor de n es 171.

1823. Jacinto, al momento de pagar en caja, se le consulta sobre dos opciones de descuento. La primera opción es un 40% del precio total y la segunda opción son dos descuentos consecutivos del 20%, si el precio del producto es de Bs 400, ¿qué opción le conviene elegir a Jacinto?

Resolución

Si Jacinto elige un descuento del 40%:

$$400 \cdot 40\% = 400 \cdot \frac{40}{100} = 160$$

Así, el costo con un único descuento es Bs 240.

Si Jacinto elige dos descuentos consecutivos del 20%:

$$400 \cdot 20\% = 400 \cdot \frac{20}{100} = 80$$

El costo del producto con este primer descuento será: Bs 320.
Aplicando el segundo descuento:

$$320 \cdot 20\% = 320 \cdot \frac{20}{100} = 64$$

Así, el costo con el segundo descuento es Bs 256.

Respuesta
Jacinto debería elegir el único descuento del 40%.

1824. Un cerrajero cobra Bs 5 por cortar en dos una barra de acero, ¿cuánto será el costo por cortar una barra en 8 partes?

Resolución

Organizamos los costos en una tabla, observando que por cada corte la barra quedará partida en dos pedazos:

N° de cortes	Cantidad de pedazos del tubo	Precio (Bs)
1	2	4
2	3	8
3	4	12
4	5	16
5	6	20
6	7	24
7	8	28

Respuesta
De la tabla, para 8 partes, el precio será de Bs 28.

1825. Imagina que tienes un candado cerrado de 3 dígitos y las siguientes pistas:

- **PISTA 1:** 682 tiene una cifra correcta y está en su lugar.
- **PISTA 2:** 614 contiene una cifra correcta, pero está en el lugar incorrecto.
- **PISTA 3:** 206 contiene dos cifras correctas, pero ambas están en el lugar incorrecto.
- **PISTA 4:** 738 no contiene cifra correcta alguna.
- **PISTA 5:** 780 contiene una cifra correcta y está en el lugar incorrecto.

¿Cuál es la combinación que abre el candado?

Resolución

Analizamos cada una de las pistas:

PISTA 4: Esto implica que los dígitos 7, 3 y 8 no aparecen en la combinación correcta.

PISTA 5: Esto implica que 0 aparece en la combinación final, pero que su posición no es la correcta.

PISTA 3: Esto implica que 2 o 6 es una cifra correcta de la combinación.

De la **PISTA 1** y **2, 6** no es una cifra de la combinación correcta. (6 estaría en una posición correcta e incorrecta a la vez).

Por tanto, 2 es parte de la combinación correcta y estaría en la posición 3 y las **PISTAS 3** y **5** implican que 0 está en la primera posición.

Finalmente la **PISTA 2** también descarta al 1, por tanto 4 aparece como cifra del medio.

Respuesta

La combinación que abrirá el candado es 042.

1826. Santos se pregunta sobre la masa total de los seres humanos que viven sobre el planeta Tierra en la actualidad, asumiendo que según la ONU, la población mundial aproximada es de 8 000 000 000 y el peso promedio por persona es 62 kilogramos.

Datos

P: Población mundial aproximada
$P \approx 8\,000\,000\,000 = 8 \times 10^9$
p: peso promedio de un ser humano
$p \approx 62$ kilogramos
Incógnita:
M: Masa total

Resolución

Con los datos, cuyos valores son aproximados, se procede a calcular la masa total de todos los seres humanos:

$$\begin{aligned} M = P \cdot p &= 8 \times 10^9 \times 62 \\ &= 496 \times 10^9 \\ &= 4{,}96 \times 10^{11} \end{aligned}$$

Por tanto, $M = 4{,}96 \times 10^{11}$ kilogramos.

Respuesta

La masa será aproximadamente 5×10^{11} o 500 mil millones de kilogramos.

1827. Si el consumo promedio recomendado de azúcar es 70 gramos por día y la esperanza de vida es 80 años, ¿cuánta azúcar consume durante toda su vida una persona?

Datos

C: Consumo promedio de azúcar.
$C = 70$ gramos al día
E: Esperanza de vida promedio de una persona.
$E = 80$

Resolución

Con los datos, calculamos el consumo anual de una persona en un año:
$70 \cdot 365 = 25\,550$ gramos
y calculamos el consumo de azúcar en 80 años:

$$80 \cdot 25\,550 = 2\,044\,000 \text{ gramos.}$$

Convirtiendo a kilogramos la cantidad recientemente obtenida es 2044 kilogramos.

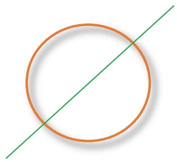
Respuesta

Se estima que una persona consume 2044 kilogramos de azúcar en toda su vida.

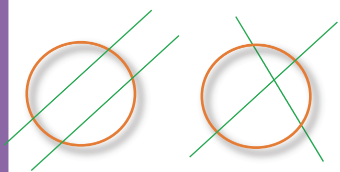
1828. Si se tiene un círculo, ¿cuál es la cantidad máxima de fragmentos que se pueden obtener al dividir la figura en cuestión con tres líneas rectas?

Resolución

Veamos en el caso base con una línea y ver qué pasa a medida que aumentan las líneas, es decir:

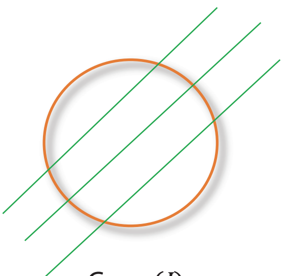


Con una línea, se divide el círculo en dos fragmentos, no necesariamente iguales, pero si se divide en 2 fragmentos.

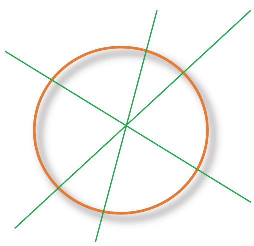


Existen dos maneras de dividir el círculo en fragmentos.
El primer caso si las líneas no se intersectan, se obtiene 3 fragmentos

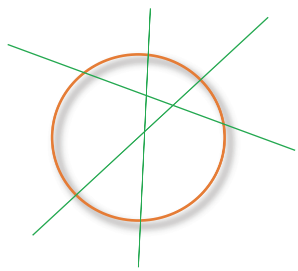
El segundo caso si las líneas se intersectan entonces se obtendrían 4 fragmentos. Como se quiere obtener la cantidad máxima de fragmentos, se toma el segundo caso.
Con tres líneas existen 3 maneras de hacer los cortes, es decir:



Caso (I)



Caso (II)



Caso (III)

En el primer caso se obtienen 4 fragmentos.
En el segundo caso se obtienen 6 fragmentos.
En el tercer se obtienen 7 fragmentos.
Lo que nos dice que a mayor intersección entre las líneas se tendrá más fragmentos.

Respuesta

La cantidad máxima que se puede obtener son 7 framentos con 3 lineas.

1829. En una reunión con 367 personas, ¿habrá personas que compartan el mismo cumpleaños? ¿Cuál es el número mínimo de personas que deberán compartir el mismo cumpleaños?

Resolución

Usando el razonamiento del principio del palomar.

Analicemos el caso más extremo, que todas las personas cumplen años en días distintos del año, además cuando el año es bisiesto tenemos 366 días.

Como hay 367 personas, al menos dos compartirán cumpleaños, imagina que acomodamos la foto de cada persona en su cumpleaños en un calendario, el calendario se llenará y nos sobrará una foto en caso de año bisiesto y dos fotos en caso de año regular. Tendremos que acomodar a estas personas sobrantes en algún día ya ocupado. Es decir, como mínimo 2 personas compartirán cumpleaños.

Respuesta

Habrán personas que cumplan años el mismo día, y como mínimo serán 2 personas.

1830. Estimar la cantidad de taxis que hay en una ciudad.

Resolución

Supongamos que el total de habitantes de la ciudad es de 1 000 000 de personas. De ellas, 5 de cada 10 tiene un automóvil; es decir, medio millón de personas y 2 de cada 5 conduce un taxi; es decir, 200 000.

Respuesta

Se estima una cantidad de 200 000 taxistas en la ciudad.

1831. Dayana coloca una hoja de papel bond sobre el piso. Luego coloca otra hoja sobre la primera, después dos hojas sobre las anteriores, luego cuatro hojas y después ocho hojas y así sucesivamente se forma una columna creciente de hojas de papel añadiendo cada vez tantas hojas como las que hay en dicha columna. Si ella pudiese continuar este proceder, ¿cuál sería la altura del montón después de repetir este proceso 51 veces?

Resolución

Es mejor organizar la información del problema en una tabla:

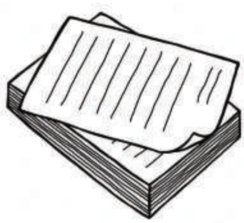
Paso	N° de hojas colocadas
1	$1 = 2^0$
2	$2 = 2^1$
3	$4 = 2^2$
4	$8 = 2^3$
5	$16 = 2^4$
$\vdots$	$\vdots$
51	2^{50}

Asumiendo que el grosor promedio de una hoja de papel es 1 mm, podemos calcular altura de la columna de hojas:

$2^{51} \cdot 1 \text{ mm} = 2^{51} \text{ mm}$

El valor en kilómetros es:

2 251 799 813 685,25 mm



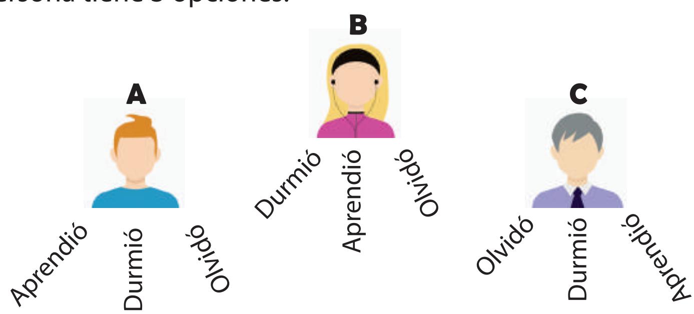
Respuesta

La altura del bloque de papeles será de 2 251 799 813 685,25 mm.

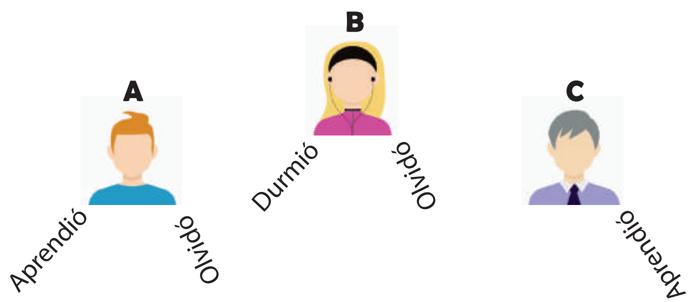
1832. Tres personas, A, B y C, leyeron un libro. Una de ellas aprendió, otra se durmió y la otra olvidó todo rápidamente. Sabemos que A no se durmió, que B no aprendió y que C aprendió. ¿Quién se durmió?

Resolución

Cada persona tiene 3 opciones:



Como C sí aprendió, nos queda averiguar qué pasó con A y B, ya que A no se durmió, que B no aprendió, les queda



Como C aprendió y A tiene las opciones de "aprendió" ó "olvido" entonces A olvido.
El único que tiene la posibilidad de haber dormido es B.

Respuesta
Se durmió B.

1833. Un mercader tenía ocho perlas exactamente iguales en forma y tamaño, pero una de ellas era falsa y pesaba menos que las otras. ¿De cuántas maneras puede determinar la perla falsa, realizando solamente 2 pesadas con una balanza de dos platos?

Resolución

Es conveniente realizar una primera pesada de 6 perlas, así podemos distinguir dos casos:

Caso (I):
La balanza está en equilibrio:

Eso implica que la perla falsa está entre las dos perlas restantes, la cual se determina con la segunda pesada:

Caso (II):
La balanza no está en equilibrio:

La perla falsa se encuentra en el grupo asociado a la flecha roja, de modo que tomamos 2 de las perlas y las pesamos:

Si la balanza está en equilibrio:

la tercera es la falsa.

Si la balanza no está en equilibrio:

la perla se elevará.

Es similar si la balanza se eleva al lado derecho; es decir, si contiene a la perla falsa

Respuesta
Existen 3 maneras para detectar la perla falsa, con solo 2 pesadas.

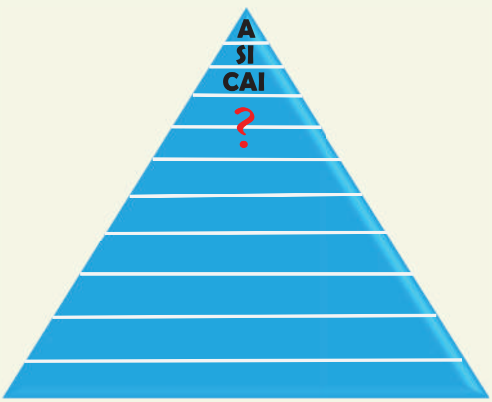
1834. Mayela, Pamela y Daniela quieren ver una película de las 3 que están en cartelera. Pero no se pueden poner de acuerdo, si Mayela no quiere ver la película 3, Pamela quiere ver la película 2, pero no quiere ver 1 y Daniela le da igual qué película ver.
¿Qué película deberían ver?

Resolución

Mayela no quiere ver la película 3, pero puede ver la película 1 o 2.
Pamela quiere ver la película 2 y no quiere ver la película 1.
Daniela le da igual qué película ver, luego puede ver 1, 2 y 3
Todas coinciden en poder ver la película 2.

Respuesta
Deberían ver la película 2.

1835. Completar el triángulo con las siguientes letras:
AMETAMITACS
En la primera fila una sola letra, en la segunda fila dos letras y así sucesivamente hasta llegar a la última fila, donde habrá 11 letras. Las palabras que se pongan en cada línea deben existir en el castellano. Solo se pueden usar las letras mencionadas al principio.



Resolución

Primero ordenamos las 11 letras, para poner en la base del triángulo. La palabra es MATEMÁTICAS, usando estas letras y ninguna más, armamos palabras de 10 letras, de 9, de 8, y así sucesivamente hasta llegar a 1. Este triángulo tiene más de una sola solución.

Respuesta

1836. Andrés posee un reloj que emite 1 pitido a la 1, 2 pitidos a las 2, 3 pitidos a las 3 y así sucesivamente hasta emitir 12 pitidos a las 12. ¿Cuántos pitidos emitirá en dos vueltas completas comenzando desde las 12? ¿y en n vueltas?

Resolución

A partir de la primera hora aumenta en un pitido, por cada hora.
En 1 vuelta será:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78$ pitidos

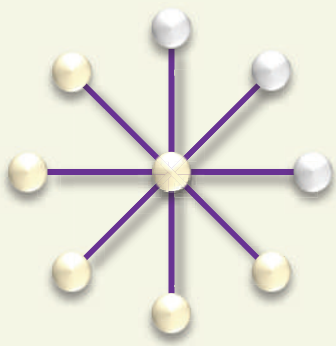
Como son dos vueltas:

$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12)\ 2 = 156$ pitidos

Entonces el número de pitidos depende del número de vueltas que dé, así para n vueltas se tendrá:
$(1+2+3+\cdots+12)\ n$ pitidos

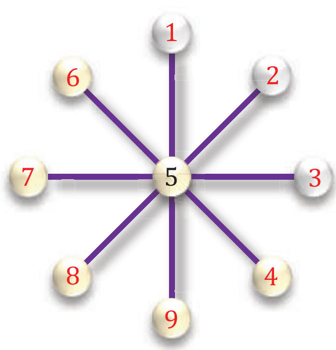
Respuesta
En dos vueltas dará 156 pitidos y para n vueltas habrá que determinar $(1+2+3+\cdots+12)n$, para el número de pitidos.

1837. Organizar los números del 1 al 9 de manera que la suma de cada línea horizontal, vertical y diagonal sea la misma, sin repetir ningún número.



Resolución

Notemos que:
$1+2+3+4+5+6+7+8+9=(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+(5)$
Acomodamos cada par que está en paréntesis, para cada línea y el 5 que no tiene par lo ubicamos al centro:



Intermedio 02

1838. Javier está de compras y solo tiene una bolsa grande para guardar las frutas y vegetales que son: Uva, Papa, Tomate, Zanahoria, Kiwi. Se sabe que la uva se daña con el tomate, que la papa y la zanahoria no se dañan con nada, que el kiwi se daña con la uva y el tomate se daña con la zanahoria, ¿en qué orden deberíamos comprar cada cosa?

Resolución

Notar que la papa y la zanahoria, no se daña con nada, primero compramos papa y la acomodamos en la bolsa vacía y luego la zanahoria que tampoco se daña con nada.

El kiwi se daña con la uva, entonces estos van separados.

El tomate se daña con la zanahoria, entonces estos van separados.

Por tanto, se puede ordenar así:

Respuesta

El orden es: papa, zanahoria, kiwi, tomate y uva.

1839. Si el diámetro de la tierra es $12\ 742$ km y de una pelota de golf es $42{,}67$ mm, ¿cuántas pelotas de golf harían falta para rodear la Tierra por la línea del Ecuador?

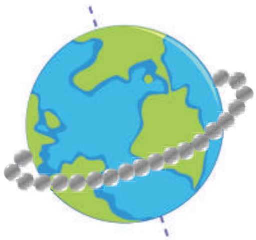
Datos

D: diámetro aproximado de la tierra (asumiendo que su forma es esférica).

$$D \approx 12\ 742 \text{ km}$$

d: diámetro reglamentario de una pelota de golf

$$d \approx 42{,}67 \text{ mm}$$



Resolución

Calculando el diámetro de la Tierra (longitud de la línea del Ecuador):

$$\pi \cdot 12\ 742 \text{ km} \approx 40\ 000 \text{ km}$$

Transformando 40 000 km a milímetros:

$$40\ 000 \text{ km} = 4\times10^{10}\text{mm}$$

Con lo anterior, calculamos la cantidad aproximada de pelotas de golf que caben en la línea del Ecuador:

$$\frac{4\times10^{10}}{42{,}67} \approx 937\ 426\ 763$$

Respuesta

Harían falta alrededor de 937 426 763 pelotas de golf.

1840. El cuerpo de una persona promedio contiene 5,5 litros de sangre y alrededor de 5 millones de glóbulos rojos por milímetro cúbico de sangre. Dado que un litro es igual a 10^6 milímetros cúbicos, ¿cuántos glóbulos rojos tiene una persona promedio?

Datos

S: Cantidad de litros de sangre promedio.

$S = 5{,}5$ L

Incógnita:

G: Cantidad de glóbulos rojos en la sangre.

Resolución

Se calcula la cantidad de glóbulos rojos en la sangre primero convirtiendo S a mm^3:

$$5{,}5\ \text{L}\cdot\frac{10^6\text{mm}^3}{1\ \text{L}}=5\ 500\ 000\,\text{mm}^3$$

$$5\,500\,000mm^3 \cdot \frac{5\,000\,000\,\text{glóbulos}}{1\ \ mm^3} \approx 3 \times 10^{13}\,\text{glóbulos}$$

Respuesta

Una persona promedio aproximadamente tiene un total de 3×10^{13} glóbulos rojos en su sangre.

1841. Hallar la palabra oculta de 5 letras en las 5 palabras:

12, 13, 34, 35, 56

1. FLETA **2.** FLEMA **3.** FLOTA
4. FLORA **5.** ALOTA **6.** ANOTA

Pista: viven, habitan, residen.

Resolución

Usamos la sucesión de números del enunciado para comparar las palabras enumeradas:

12 $\Longrightarrow$ **FLETA** y **FLEMA**, tienen la **T** y **M** distintas
13 $\Longrightarrow$ **FLETA** y **FLOTA**, tienen la **E** y **O** distintas
34 $\Longrightarrow$ **FLOTA** y **FLORA**, tienen la **T** y **R** distintas
35 $\Longrightarrow$ **FLOTA** y **ALOTA**, tienen la **F** y **A** distintas
56 $\Longrightarrow$ **ALOTA** y **ANOTA**, tienen la **L** y **N** distintas

Veamos todas las letras distintas juntas: **T E T F L** no parecen formar ninguna palabra, pero **MORAN** sí, además coincide con las palabras viven, habitan, residen.

Respuesta

La palabra es MORAN.

1842. Determinar un código de 4 dígitos en el que no se repita ningún número, utilizando solo los dígitos del 1 al 9.

Pista 1: 5236 tiene dos números correctos en posiciones correctas.
Pista 2: 1623 tiene tres números correctos, uno en posición correcta y dos en posiciones incorrectas.
Pista 3: 3861 tiene dos números correctos en posiciones incorrectas.
Pista 4: 8314 tiene tres números correctos, uno en posición correcta, dos en posiciones incorrectas.

Resolución

En 5236 se tienen dos números correctos y en 1623 se tienen tres números correctos, por tanto 1 debe ser un número correcto y 5 no, pues 5236 y 1623 tienen en común 236 y al quitar el 5 y sustituirlo por 1, se tiene por la pista 2, 2 números correctos.
El mismo razonamiento para 1623 y 3861,2 es un número del código y 8 no.
Lo mismo para 3861 y 8314,4 es un número del código y 6 no lo es.

Hasta ahora sabemos que 1, 2 y 4 son números del código, también sabemos que 5, 8 y 6 no son números del código. Por la pista 3 deducimos que 3 es un número del código, pues 3861 tiene dos números del código, 8 y 6 no son números del código, 1 lo es y solo queda que el 3 también lo sea.

Ya tenemos los 4 dígitos: 1, 2, 4 y 3, nos queda averiguar el orden. De la pista 1 sabemos que 2 y 3 son los números correctos y están en el segundo y tercer lugar respectivamente, pues 5 y 6 ni siquiera son números del código, así se tendría:

_23_

De la pista 2 podemos deducir que 1 va primero, pues 2 y 3 van en 2° y 3° puesto, sin embargo, en la pista 2, 2 va 3° y 3 va 4°,2 y 3 son los números en posiciones incorrectas, la pista nos menciona dos números en posiciones incorrectas y uno en posición correcta, por tanto, el 1 está en posición correcta. Así el 1 va primero:

123_

El último número solo puede ser 4.

Respuesta

El código es 1234.

1843. Paola tiene tres cajas etiquetadas de la siguiente manera: "Clavos", "Tornillos" y "Clavos y Tornillos". Se sabe que cada una de las etiquetas está equivocada y solo se puede abrir una caja y sacar un objeto de ella. ¿Cómo determinar cuál es la etiqueta correcta para cada caja?

Resolución

Se tiene 3 cajas entre clavos, tornillos y clavos y tornillos, además las etiquetas están equivocadas.

Al abrir la caja etiquetada como "Clavos y Tornillos", debido a que la etiqueta está equivocada, esta caja solo contiene clavos o solo tornillos.

Supongamos que Paola saca un clavo de esta caja. Esto significa que la caja que estaba etiquetada como "Clavos y Tornillos" contiene solo clavos.

Ahora tiene dos cajas restantes, una etiquetada como "Clavos" y otra como "Tornillos". La caja etiquetada como "Clavos" no puede contener solo clavos (porque la etiqueta es incorrecta), por lo que debe contener solo tornillos.

Finalmente, la caja etiquetada como "Tornillos" debe contener tanto clavos como tornillos, ya que las otras dos etiquetas ya se corrigieron.

Respuesta

Abriendo la caja con el nombre "clavos y tornillos" se determina la etiqueta de cada caja.

1844. Adivinar un código de 4 letras, sabiendo que el código es una palabra que existe en el castellano, todas las letras son distintas y nos dan 3 pistas:

Pista 1: ESTA tiene 3 letras correctas, 2 en lugares incorrectos y 1 letra en el lugar correcto
Pista 2: TIAS tiene 2 letras correctas, pero ambas en lugares incorrectos
Pista 3: TEMA tiene 4 letras correctas, pero todas en lugares incorrectos
Pista 4: LUTO tiene 1 letra en el lugar correcto

Resolución

De la pista 3 ya sabemos qué letras tiene el código, pues la pista nos dice que el código TEMA tiene 4 letras correctas el problema es que no están ordenadas. Debemos averiguar en qué orden están las letras T E M A en el código.

La pista 4 nos dice que tiene una letra en el lugar correcto, como T es la única en común entre TEMA y LUTO entonces T está en el 3° lugar, así:

_ _ T _

La pista 3 nos dice que tiene dos letras correctas, pero solo una en su lugar. Las únicas letras que tienen en común entre TEMA y TIAS son las letras T y A, pero no sabemos en que orden esta A, más sí la letra T.

La pista 1 nos dice que tiene 3 letras correctas, las únicas letras que tienen en común TEMA y ESTA son las letras E, T y A, una letra en el lugar correcto T y dos letras en el lugar incorrecto E y A.

Por la pista 1 y 3, E está en el lugar incorrecto, por tanto, solo le queda estar en el 4° lugar, así:

_ _ T E

Nos queda acomodar A y M, solo hay dos opciones: AMTE o MATE, pero una de las condiciones dice que el código es una palabra que existe en el castellano y AMTE no existe.

Respuesta

El código debe ser MATE

1845. Encontrare una solución al problema de 3 trabajadores que deben distribuir 21 frascos de miel a tres tiendas, 7 de los cuales están llenos, 7 están a la mitad y los restantes están vacíos, de modo que no se abra alguno y cada tienda tenga la misma cantidad de frascos y la misma cantidad de miel.

Resolución

Cada tienda debe recibir 2 frascos de miel llenos:

Quedando 15 frascos por repartir asignamos tres frascos medio llenos a las tiendas 1 y 2:

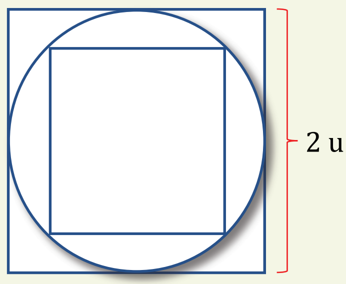
TIENDA 1 **TIENDA 2**

Quedando 9 frascos, asignamos el frasco lleno y el medio lleno restante a la tienda 3, mientras que los restantes vacíos los asignamos dos a cada una de las tiendas 1 y 2 y; el sobrante a la tienda 3:

Respuesta

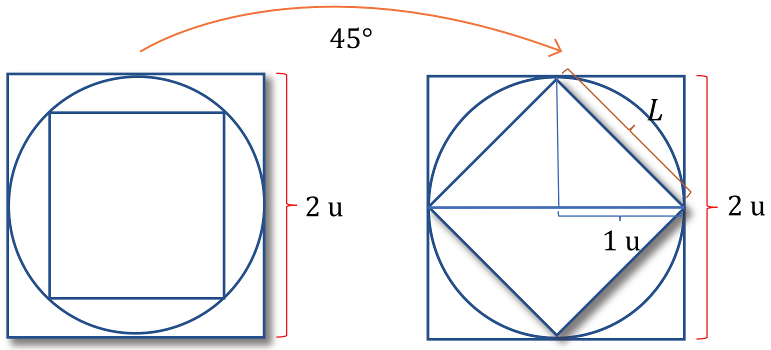
A dos tiendas les tocarían 2 frascos llenos, 2 frascos vacíos y 3 frascos medio llenos; mientras que a la restante le tocaría 3 frascos llenos, 1 frasco medio lleno y 3 vacíos.

1846. El lado del cuadrado mayor mide 2 unidades, ¿cuál es el área del cuadrado menor?



Resolución

El problema se resuelve rotando 45° el cuadrado interior, en sentido horario para hacer coincidir una de sus diagonales con el diámetro de la circunferencia:



La circunferencia es de radio 1, luego el lado del cuadrado interior será por el teorema de Pitágoras:

$$L = \sqrt{(1\ \mathrm{u})^2 + (1\ \mathrm{u})^2} = \sqrt{2\ \mathrm{u}^2} = \sqrt{2}\ \mathrm{u}$$

y su área es:

$$A = L^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2\ \mathrm{u}^2 = 2\ \mathrm{u}^2$$

Respuesta

El área del cuadrado menor es 2 u^2.

1847. Se tienen 10 frascos de pastillas, cada pastilla pesa 1 gramo, excepto en uno de los frascos donde cada pastilla pesa 1,1 gramos. También se tiene una balanza digital que puede medir el peso con gran precisión, pero solo puede usada una vez. ¿Cómo identificar el frasco con las pastillas diferentes?

Resolución

Primero numeramos los frascos del 1 al 10, toma 1 pastilla del frasco 1, 2 pastillas del frasco 2, 3 pastillas del frasco 3 y así sucesivamente.

Si todas las pastillas pesaran 1 gramo, el peso total sería la suma de los números del 1 al 10, es decir:

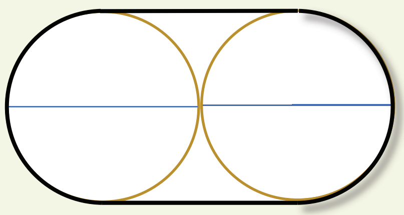
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ gramos.

Sin embargo, debido a que uno de los frascos contiene pastillas que pesan 1,1 gramos, el peso total será mayor que 55 gramos, la diferencia entre el peso medido y 55 gramos te indicará cuál es el frasco con las pastillas más pesadas, se podrá expresar:
Peso total $-55 = 0,1 \cdot$ Número del frasco

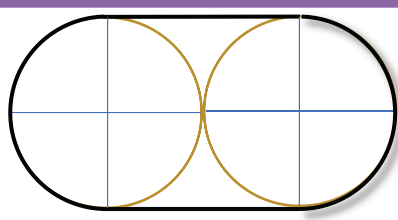
Supongamos que el frasco con pastillas de 1,1 gramos es el frasco 2, entonces la balanza nos marcará
$1 + 2(1,1) + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55{,}2$
Entonces:
$55{,}2 - 55 = 0,2 = 0,1 \cdot 2 = 0,1 \cdot$ Número del frasco

Respuesta
El decimal nos indicará qué frasco es el que tiene pastillas diferentes.

1848. Sean los 2 cilindros cuyos radios son iguales a r, vistos desde el aire y atados por un lazo de color negro como en la figura, ¿cuál es la longitud del lazo de color negro que los ata?



Resolución



Del gráfico se deduce que el cuadrilátero es un cuadrado, pues el radio de la circunferencia es r y cada uno de los lados del cuadrilátero tiene lado $2r$. Por otro lado, la medida de la semicircunferencia es:

$$\frac{\pi \cdot 2r}{2} = \pi \cdot r$$

Sumando todo obtenemos:

$$\pi \cdot r + \pi \cdot r + 2r + 2r = 2\pi \cdot r + 4r = (2\pi + 4)r$$

Respuesta

La longitud del lazo de color negro es: $(2\pi + 4)r$

1849. Pamela debe obtener un litro de agua de un río, pero utilizando solamente dos recipientes de 5 y 7 litros. Indique un procedimiento para poder lograr esto.

Respuesta

En los gráficos, el recipiente más grande es el de $7\ \mathrm{L}$ y el más pequeño de $5\ \mathrm{L}$.

Paso 1: Empezamos con los dos recipientes vacíos:

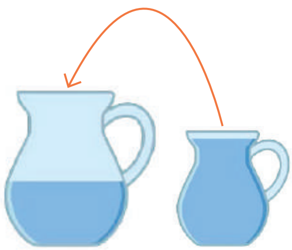
Paso 2: Llenamos con agua el recipiente de $5\ \mathrm{L}$ y lo vaciamos en el de $7\ \mathrm{L}$:

Paso 3: Volvemos a llenar el recipiente de $5\ \mathrm{L}$:

Paso 4: Vaciamos el contenido del recipiente lleno de $5\ \mathrm{L}$, hasta llenar el de $7\ \mathrm{L}$, quedando $3\ \mathrm{L}$ en el recipiente de $5\ \mathrm{L}$:

Paso 5: Desechamos el toda el agua del recipiente grande y vaciamos allí los 3 L del recipiente pequeño:

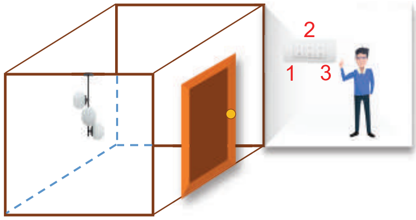
Paso 6: Llenamos el recipiente vacío de 5 L y vamos echando su contenido en el recipiente de 7 L hasta llenarlo, el cual tiene 3 L en su interior, quedando 1 litro contenido en el recipiente de 5 L:



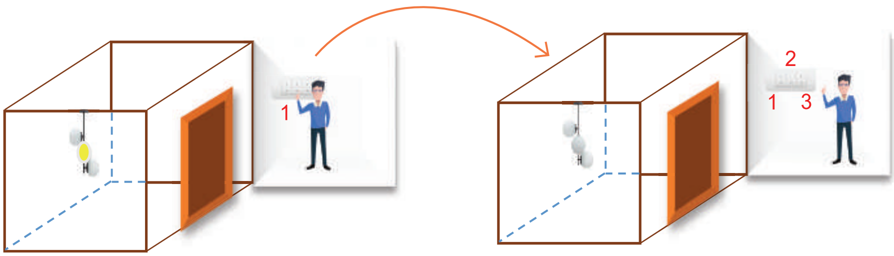
1850. Fuera de una habitación hay tres interruptores, y dentro hay tres focos, los focos se calientan cuando se encienden por unos minutos y están todos apagados. Cada interruptor corresponde a un foco, pero no se sabe cuál controla cuál. Si solo se puede entrar a la habitación una vez, ¿cómo determinar qué interruptor controla cada foco?

Resolución

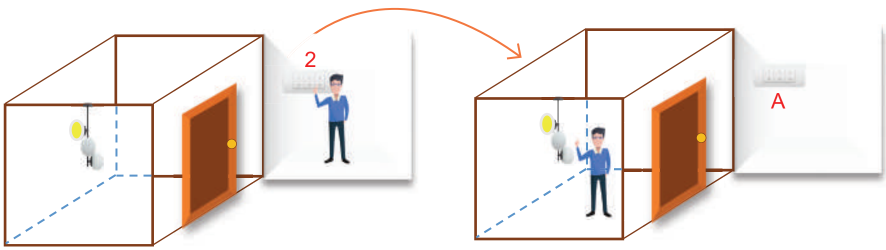
Numera los interruptores como 1, 2 y 3.



Si encendemos un foco con el interruptor 1 y esperamos un tiempo, este calentará. Ya sabremos que el interruptor 1 corresponde al foco caliente y lo apagamos.



Encendemos otro foco con el interruptor 2, lo dejamos encendido y entramos a la habitación. Ya sabemos que el foco encendido corresponde al interruptor 2.



Respuesta

Al ingresar al cuarto, el foco apagado caliente corresponde al interruptor 1, el foco encendido corresponde al interruptor 2 y el foco apagado frío corresponde al interruptor 3.

Razonamiento Aplicado

1851. Un helado cuesta a 3 bolivianos y el maestro de la unidad educativa decide invitar helados a 7 estudiantes. Yo soy el encargado de ir a comprar los helados, ¿cuánto dinero pediré al maestro para los 7 helados?

Resolución

Datos:

1 helado cuesta 3 bolivianos (Bs)
7 helados cuestan x bolivianos (Bs)

Por la regla de tres simple:

Fuente: Yandex

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ he} \longrightarrow 3\text{ Bs} \\ 7\text{ he} \longrightarrow x\text{ Bs} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1\text{ helado}}{7\text{ helado}} = \frac{3\text{ Bs}}{x}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{3\text{ bs}}{1\text{ helado}} \cdot 7\text{ helado} = 21\text{ Bs}$$

$$\Longrightarrow x = 21\text{ Bs}$$

Respuesta

Le pediré al maestro 21 bolivianos.

1852. Si se ahorran 8 Bs cada mes, ¿cuánto dinero acumulado se tendrá en un año?

Resolución

Datos:

En 1 mes se ahorra 8 Bs
En 1 año se ahorra x Bs
1 año tiene 12 meses

Fuente: Economía – Banco Unión

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ mes} \longrightarrow 8\text{ Bs} \\ 12\text{ meses} \longrightarrow x \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1\text{ mes}}{12\text{ meses}} = \frac{8\text{ Bs}}{x}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{8\text{ Bs}}{1\text{ mes}} \cdot 12\text{ meses} = 96\text{ Bs}$$

$$\Longrightarrow x = 96\text{ Bs}$$

Respuesta

El dinero acumulado en un año será de 96 bolivianos.

1853. Unos amigos alquilaron un espacio recreativo por 3 horas y pagaron 27 bolivianos. Al cumplirse las primeras 3 horas, ahora desean quedarse 5 horas más, ¿cuánto dinero tendrán que reunir los amigos para pagar esas 5 horas adicionales?

Resolución

Fuente: noticiasfides.com

Datos:

3 horas (h) cuesta 27 bolivianos (Bs)
5 horas (h) cuesta x bolivianos (Bs)

$$\left.\begin{array}{l} 3\text{ h} \longrightarrow 27\text{ Bs} \\ 5\text{ h} \longrightarrow x\text{ Bs} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{3\text{ h}}{5\text{ h}} = \frac{27\text{ Bs}}{x}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{27\text{ Bs}}{3\text{ h}} \cdot 5\text{ h} = 45\text{ Bs}$$

$$\Longrightarrow x = 45\text{ Bs}$$

Respuesta

Tendrán que reunir 45 bolivianos

1854. Unos amigos alquilaron un espacio recreativo por 3 horas y pagaron 27 bolivianos. Al cumplirse las primeras 3 horas, ahora desean quedarse 5 horas más, ¿cuánto dinero tendrán que reunir los amigos para pagar esas 5 horas adicionales?

Resolución

Datos:

18 conejos (C) cuesta 486 Bs
1 conejos (C) cuesta x Bs

$$\left.\begin{array}{l} 18 \text{ conejos} \longrightarrow 486 \text{ Bs} \\ 1 \text{ conejo} \longrightarrow x \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{18 \text{ conejos}}{1 \text{ conejo}} = \frac{486 \text{ Bs}}{x}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{486 \text{ Bs}}{18 \text{ conejos}} \cdot 1 \text{ conejo} = 27 \text{ Bs}$$

$$\Longrightarrow x = 27 \text{ Bs}$$

Respuesta

Cada conejo cuesta 27 bolivianos

1855. Juan y sus amigos fueron a jugar fútbol a una cancha que cobra por su uso. Pasaron 2 horas y pagaron 72 Bs, donde cada uno aportó 3 Bs. Los amigos de Juan desean jugar 1 hora más.

a) ¿Cuánto dinero costará la hora de uso de la cancha?
b) ¿Si Juan se fue después de 2 horas, cuánto dinero aportará cada uno por la hora extra?

Resolución

Datos:

2 horas cuesta 72 Bs
x: Monto a pagar por 1 hora
y: Número de amigos
Cada amigo pagó 3 Bs

Fuente: El Potosí

a) ¿Cuánto dinero costará la hora de uso de la cancha?

$$\left.\begin{array}{l} 2\text{ h} \longrightarrow 72\text{ Bs} \\ 1\text{ h} \longrightarrow x \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{2\text{ h}}{1\text{ h}} = \frac{72\text{ Bs}}{x}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{72\text{ Bs}}{2\text{ h}} \cdot 1\text{ h} = 36\text{ Bs}$$

$$\Longrightarrow x = 36\text{ Bs}$$

b) ¿Cuánto dinero aportará cada uno después de las 2 horas?

$$\left.\begin{array}{l} y\text{ amigos} \longrightarrow 72\text{ Bs} \\ 1\text{ amigo} \longrightarrow 3\text{ Bs} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{y\text{ amigos}}{1\text{ amigo}} = \frac{72\text{ Bs}}{3\text{ Bs}}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{72\text{ Bs}}{3\text{ Bs}} \cdot 1\text{ amigo} = 24\text{ amigos}$$

$$\Longrightarrow y = 24\text{ amigos}$$

Ya que Juan se fue, solo pagaran la hora extra los 23 amigos de Juan y por el anterior inciso a) la hora de la cancha cuesta 36 Bs.

$$\left.\begin{array}{l} 23\text{ amigos} \longrightarrow 36\text{ Bs} \\ 1\text{ amigo} \longrightarrow z\text{ Bs} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{23\text{ amigos}}{1\text{ amigo}} = \frac{36\text{ Bs}}{z}$$

$$\Longrightarrow z = \frac{36\text{ Bs}}{23\text{ amigos}} \cdot 1\text{ amigo} \approx 1{,}5\text{ Bs}$$

$$\Longrightarrow z = 1{,}5\text{ Bs}$$

Respuesta

a) 36 bolivianos y b) 1,5 bolivianos

1856. El precio del pan que consume Sergio se duplicó, el compraba 6 panes a 3 Bs, ¿cuál es el costo de cada pan el día que hubo aumento de precio?

Resolución

Datos:

6 panes cuestan 3 Bs
1 pan cuesta x Bs

Fuente: Los Tiempos

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} 6 \text{ panes} \longrightarrow 3 \text{ Bs} \\ 1 \text{ pan} \longrightarrow x \text{ Bs} \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{3 \text{ Bs}}{6 \text{ panes}} \cdot 1 \text{ pan} = 0{,}5 \text{ Bs}$$

$$\Longrightarrow x = 0{,}5 \text{ Bs}$$

Como se duplico el precio, entonces el nuevo costo de cada pan será:

$$N_c = 2 \cdot (0{,}5 \text{ Bs}) = 1 \text{ Bs} \quad \Rightarrow \quad N_c = 1 \text{ Bs}$$

Respuesta

El costo del pan es de 1 boliviano.

1857. Si Luis vende caramelos y gana 40 centavos por cada caramelo vendido, ¿cuántos caramelos tendrá que vender si desea comprar un celular que cuesta 350 Bs?

Resolución

Datos:

Con 1 caramelo gana 40 centavos
Con x caramelo gana 350 Bs
1 boliviano es 100 centavos

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ Bs} \longrightarrow 100 \text{ cts} \\ x \text{ Bs} \longrightarrow 40 \text{ cts} \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{40 \text{ cts}}{100 \text{ cts}} \cdot 1 \text{ Bs} = 0{,}4 \text{ Bs}$$

$$\Longrightarrow x = 0{,}4 \text{ Bs}$$

Calculando el número de caramelos:

$$\left.\begin{array}{lcr} 1 \text{ caramelo} & \longrightarrow & 0{,}4 \text{ Bs} \\ x \text{ caramelos} & \longrightarrow & 350 \text{ Bs} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= \frac{350 \text{ Bs}}{0{,}4 \text{ Bs}} \cdot 1 \text{ caramelo} \\ &= 875 \text{ caramelos} \end{aligned}$$

Respuesta

Tendrá que vender 875 caramelos

1858. El 75% del costo de un celular es igual al costo de una bicicleta que cuesta 450 Bs, ¿cuánto dinero se ahorraría si en lugar de comprar un celular se comprara una bicicleta, considerando que las bicicletas están en promoción con un descuento del 15%?

Resolución

Datos:

El 75 % del costo del celular es 450 bolivianos
El 25 % del costo del celular es x bolivianos
El 100 % del costo de la bicicleta es x bolivianos
El 15 % del costo de la bicicleta es y bolivianos
El dinero ahorrado será $x+y$
Por la regla de tres simple, se calcula x:

$$\left.\begin{array}{lcr} 75\% & \longrightarrow & 450 \text{ Bs} \\ 25\% & \longrightarrow & x \text{ Bs} \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{450 \text{ Bs}}{75\%} \cdot 25\% = 150 \text{ Bs}$$

$$\Longrightarrow \quad x = 150 \text{ Bs}$$

Cálculo de y:

$$\left.\begin{array}{lcr} 100\% & \longrightarrow & 450 \text{ Bs} \\ 15\% & \longrightarrow & y \text{ Bs} \end{array}\right\} \Longrightarrow y = \frac{450 \text{ Bs}}{100\%} \cdot 15\% = 67{,}5 \text{ Bs}$$

$$\Longrightarrow \quad y = 67{,}5 \text{ Bs}$$

El dinero ahorrado será:

$$x + y = 150 \text{ Bs} + 67{,}5 \text{ Bs} = 217{,}5 \text{ Bs}$$

Respuesta

Se ahorra 217 bolivianos con 0,50 centavos

1859. En una avenida, un payaso realiza malabares en el paso peatonal durante 90 segundos que dura el semáforo en rojo. Después del acto, pide una colaboración por su actuación, en ocasiones recibe dinero, en otras no. Si en promedio recauda 2 Bs por cada actuación en el semáforo, ¿cuánto dinero gana en 1 hora si actúa cada vez que el semáforo se pone en rojo?

Resolución

Datos:

Gana 2 Bs en 90 segundos.
Gana x Bs en 1 hora.
Pasando de horas a segundos:
$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$
$y = 1800$
s: tiempo acumulado del semáforo solo en rojo
Por la regla de tres:

$$\left.\begin{array}{lcl} 2 \text{ Bs} & \longrightarrow & 90 \text{ s} \\ y \text{ Bs} & \longrightarrow & 1800 \text{ s} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad x = \frac{1800 \text{ s}}{90 \text{ s}} \cdot 2 \text{ Bs} = 40 \text{ Bs}$$

$$\Longrightarrow \quad y = 40 \text{ Bs}$$

Respuesta

En una hora gana 40 bolivianos.

1860. Gustavo vende dulces en los buses de transporte público. En cada bus vende 1 o 3 dulces, llegando en ocasiones a no vender ningún dulce. Se demora como máximo 3 minutos en cada bus. Si en promedio vende 2 dulces en un bus y gana 20 centavos por cada dulce, ¿cuánto dinero en bolivianos gana en 1 hora si no descansa nada, en promedio tarda 2,5 minutos en cada bus y además tiene suficientes dulces para 2 horas?

Resolución

Datos:
$2 \cdot (20 \text{ ctvs}) = 40 \text{ ctvs}$

2,5 minutos gana 40 ctvs
60 minutos gana x ctvs

por la regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}5 \text{ min} \longrightarrow 40 \text{ ctvs} \\ 60 \text{ min} \longrightarrow x \text{ ctvs} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{40 \text{ ctvs}}{2{,}5 \text{ min}} \cdot 60 \text{ min} = 960 \text{ ctvs}$$

$$\Rightarrow x = 960 \text{ ctvs}$$

Convertimos los centavos a bolivianos:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ Bs} \longrightarrow 100 \text{ ctvs} \\ y \text{ Bs} \longrightarrow 960 \text{ ctvs} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{960 \text{ ctvs}}{100 \text{ ctvs}} \cdot 1 \text{ Bs} = 9{,}6 \text{ Bs}$$

$$\Rightarrow y = 9{,}6 \text{ Bs}$$

Respuesta

Gustavo gana 9 bolivianos con 60 centavos

1861. María decide ahorrar 3 Bs todos los domingos de cada mes desde enero y desea saber cuánto dinero tendrá acumulado el último domingo del año. Observa en el calendario que 5 meses tienen 4 domingos y los otros 7 meses tienen 5 domingos, ¿cuánto dinero tendrá acumulado en un año?

Resolución

Datos:
3 Bs de ahorro por domingo
5 meses de 4 domingos
7 meses de 5 domingos
D: domingos

Contando los meses del año:
Domingos en 5 meses D_5 :

$$D_5 = 4_D + 4_D + 4_D + 4_D + 4_D = 20_D$$

Lo que hay en 5 meses es 20 domingos.
Domingos en 7 meses D_7:

$$D_7 = 5_D + 5_D + 5_D + 5_D + 5_D + 5_D + 5_D = 35_D$$

Lo que hay en 7 meses es 35 domingos.

Ahora, domingos en 12 meses D_{12}:

$$D_{12} = 20_D + 35_D = 55_D$$

Luego en 12 meses habrá 55 domingos.
Calculando el dinero acumulado en un año, por la regla de tres:

$$\left.\begin{array}{lcl} 1_D & \longrightarrow & 3 \text{ Bs} \\ 55_D & \longrightarrow & x \text{ Bs} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = \frac{3 \text{ Bs}}{1_D} \cdot 55_D = 165 \text{ Bs}$$

$$\Rightarrow \quad x = 165 \text{ Bs}$$

Respuesta

María tendría acumulado 165 bolivianos al final del año

1862. Un equipo de trabajadores puede ensamblar 20 máquinas en 5 días. ¿Cuántos días necesitarán para ensamblar 50 máquinas al mismo ritmo?

Resolución

20 máquinas en 5 dias
50 máquinas en x_D días

$$\left.\begin{array}{lcl} 20 \text{ máquinas} & \longrightarrow & 5 \text{ días} \\ 50 \text{ máquinas} & \longrightarrow & x_D \text{ días} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_D = \frac{5 \text{ días} \cdot 50 \text{ máquinas}}{20 \text{ máquinas}}$$

$$\Rightarrow \quad x_D = 12{,}5 \text{ días}$$

Respuesta
Para ensamblar 50 máquinas se necesitan 12 días y medio.

1863. Una fábrica de botones cuenta con 12 máquinas que pueden producir 35 000 unidades en 21 horas, ¿cuántos botones (en miles de unidades) podrán producir si la fábrica duplica la cantidad de máquinas pero reduce las horas de trabajo de ellas a 18 horas?

Resolución

Se resuelve el problema utilizando regla de tres compuesta, identificando las variables:

Máquinas	Horas	Unidades (u)
12 →	21 →	35 000
24 →	18 →	x

Dado que las variables Unidades y Máquinas están en proporción directa (mientras haya más máquinas, habrá más unidades y si el trabajo en horas de estas disminuye, también ocurrirá lo mismo con la cantidad de unidades), entonces

$$\frac{35\ 000\ \text{u}}{x} = \frac{12\ \text{máquinas}}{24\ \text{máquinas}} \cdot \frac{21\ \text{h}}{18\ \text{h}}$$

Despejando x :

$$x = 60\ 000\ \text{u}$$

Respuesta
La fábrica producirá 60 000 botones.

1864. El consumo de una máquina es de 800 kWh en 5 días trabajando 10 horas al día. Si la fábrica tiene 3 máquinas adicionales y todas trabajan 12 horas al día durante 7 días, ¿cuánto será el consumo total de energía?

Resolución

Identificando las variables:

Máquinas	Días	Horas	Consumo (kWh)
1 →	5 →	10 →	800
4 →	7 →	12 →	x

$$\frac{800\ \text{kWh}}{x} = \frac{1\ \text{máquina}}{4\ \text{máquinas}} \cdot \frac{5\ \text{días}}{7\ \text{días}} \cdot \frac{10\ \text{horas}}{12\ \text{horas}}$$

Respecto a la variable Consumo (kWh), las demás están en proporción directa, luego:

Despejando x :

$$x = 5376\ \text{kWh}$$

Respuesta

El consumo total de las 4 máquinas será de 5376 kWh.

1865. Una planta química produce 3600 litros de un compuesto en 6 horas con 4 reactores trabajando simultáneamente. Si la planta decide aumentar la producción a 8 reactores y reducir el tiempo de operación a 4 horas, ¿se producirá más cantidad del compuesto?

Resolución

Identificando las variables:

Reactores		**Horas**		**Producción (L)**
4	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	3600
8	$\longrightarrow$	4	$\longrightarrow$	x

Se observa las siguientes relaciones entre las variables:

- La cantidad de reactores está en proporción directa respecto a la producción (a más reactores, mayor producción).
- La cantidad de horas está en proporción directa respecto a producción (a más reactores, mayor producción).

Por tanto:

$$\frac{3600\text{ L}}{x} = \frac{4\text{ reactores}}{8\text{ reactores}} \cdot \frac{6\text{ horas}}{4\text{ horas}}$$

Despejando x: $\quad x = 4800\text{ L}$

Respuesta: Si, se producirá 1200 L más en relación a los 3600 L iniciales.

1866. Un taller de textiles en La Paz produce 150 prendas en 6 días con 4 trabajadores, ¿cuántas prendas producirán en 9 días con 6 trabajadores?

Resolución

Datos:

$P_1 = 150$ Prendas
$D_1 = 6$ Días
$T_1 = 4$ Trabajadores
$P_2 = ?$ Prendas
$D_2 = 9$ Días
$T_2 = 6$ Trabajadores

$$\left.\begin{matrix} P_1 \longrightarrow D_1 \longrightarrow T_1 \\ P_2 \longrightarrow D_2 \longrightarrow T_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{D_2 \cdot T_2}{D_1 \cdot T_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

$$\Rightarrow \frac{D_2 \cdot T_2 \cdot P_1}{D_1 \cdot T_1} = P_2 \;\Rightarrow P_2 = \frac{9 \cdot 6 \cdot 150}{6 \cdot 4}$$

$$\Rightarrow P_2 = 337.5 \approx 338\text{ prendas}$$

Respuesta

Producirán aproximadamente 338 prendas.

1867. Una empresa agrícola en Santa Cruz cosecha 500 kg de vegetales en 7 días con 8 trabajadores. ¿Cuántos vegetales cosecharán en 10 días con 12 trabajadores?

Resolución

Datos:

$V_1 = 500$ kg Vegetales
$D_1 = 7$ Días
$T_1 = 8$ Trabajadores
$V_2 = ?$ Vegetales
$D_2 = 10$ Días
$T_2 = 12$ Trabajadores

$$\left.\begin{array}{l} V_1 \longrightarrow D_1 \longrightarrow T_1 \\ V_2 \longrightarrow D_2 \longrightarrow T_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{D_2 \cdot T_2}{D_1 \cdot T_1} = \frac{V_2}{V_1} \Longrightarrow V_2 = \frac{D_2 \cdot T_2 \cdot V_1}{D_1 \cdot T_1}$$

$$\Longrightarrow V_2 = \frac{10 \cdot 12 \cdot 500}{7 \cdot 8} = 1071.43 \approx 1071 \text{ kg}$$

Respuesta

Cosecharán aproximadamente 1071 kg de vegetales.

1868. Un grupo de voluntarios en Cochabamba planta 100 árboles en 5 días trabajando 4 horas al día, ¿cuántos árboles plantarían en 7 días trabajando 6 horas al día si el grupo se incrementa a 8 voluntarios?

Resolución

Datos:

$V_1 = 5$	Voluntarios	
$A_1 = 100$	Árboles	
$D_1 = 5$	Días	
$T_1 = 4$	Tiempo	
$V_2 = 8$	Voluntarios	
$A_2 = ?$	Árboles	
$D_2 = 7$	Días	
$T_2 = 6$	Tiempo	

$$\left.\begin{array}{l} V_1 \longrightarrow A_1 \longrightarrow D_1 \longrightarrow T_1 \\ V_2 \longrightarrow A_2 \longrightarrow D_2 \longrightarrow T_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{V_2 \cdot D_2 \cdot T_2}{V_1 \cdot D_1 \cdot T_1} \Longrightarrow A_2 = \frac{V_2 \cdot D_2 \cdot T_2 \cdot A_1}{D_1 \cdot T_1 \cdot T_1}$$

$$\Longrightarrow A_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 100}{5 \cdot 5 \cdot 4} = 336$$

Respuesta

Plantarán 336 árboles.

1869. Una fábrica de componentes electrónicos produce mensualmente 25 000 unidades, disponiendo de 15 máquinas ensambladoras funcionando 16 horas al día y 30 operarios, cuya jornada laboral es de 18 horas diarias. Para adelantar a la competencia, la dirección general dispuso aumentar la producción, incorporando a 15 operarios más y elevando la jornada laboral a 20 horas diarias; además de elevar la línea de producción a 20 máquinas, funcionando 18 horas al día, ¿de cuántas unidades será la producción?

Resolución

El siguiente diagrama organiza a las variables y sus valores:

Tiempo de producción (en días)	Jornada laboral (en horas)	Operarios	Máquinas	Funcionamiento (tiempo en horas)	Producción en unidades (u)
30 →	18 →	30 →	15 →	16 →	25 000
30 →	20 →	45 →	20 →	18 →	x

Todas las variables están en proporción directa con la variable Producción en unidades, luego:

$$\frac{25\,000\ \text{u}}{x}=\frac{30\ \text{días}}{30\ \text{días}}\cdot\frac{18\ \text{horas}}{20\ \text{horas}}\cdot\frac{15\ \text{máquinas}}{20\ \text{máquinas}}\cdot\frac{30\ \text{operarios}}{45\ \text{operarios}}\cdot\frac{16\ \text{horas}}{18\ \text{horas}}$$

Despejando x : $x = 62\,500$ u

Respuesta

Se producirán 62 500 unidades.

1870. Un proyecto de construcción en La Paz requiere 15 días para completarse con 10 trabajadores, trabajando 8 horas al día. Si el número de trabajadores aumenta a 12 y trabajan 10 horas al día, ¿cuántos días tardarán en completar el proyecto?

Resolución

Datos:

$D_1 = 15$ Días

$T_1 = 10$ Trabajadores

$H_1 = 8\,\frac{horas}{día}$

$D_2 = ?$ Días

$T_2 = 12$ Trabajadores

$H_2 = 10\,\frac{horas}{día}$

Como se quiere completar un proyecto, se tiene:

$$\left.\begin{matrix} D_1 \longrightarrow T_1 \longrightarrow H_1 \\ D_2 \longrightarrow T_2 \longrightarrow H_2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{D_2\cdot T_2\cdot H_2}{D_1\cdot T_1\cdot H_1}=1 \Longrightarrow D_2=\frac{D_1\cdot T_1\cdot H_1}{T_2\cdot H_2}$$

$$\Longrightarrow D_2=\frac{15\cdot 10\cdot 8}{12\cdot 10}=10$$

Respuesta

Tardaran 10 días en completar el proyecto.

1871. Pedro decide ahorrar dinero para comprar un balón que cuesta 70 Bs en un mes que tiene 4 semanas completas. Para ello, dispone de 5 Bs que su mamá le regala los primeros 5 días de cada semana, desde el lunes hasta el viernes. Pedro cree que si ahorra los 5 Bs cada día le sobrará dinero después de comprar el balón, por lo que desea saber, ¿cuánto dinero tendrá que ahorrar cada día para que exactamente tenga 70 Bs en un mes?

Resolución

Datos:
1 cuesta 70 Bs
1 mes de 4 semanas
5 Bs por día

Pedro recibe 5 bolivianos cada día, de lunes a viernes, es decir, los cinco días de la semana. De las 4 semanas serán:

$$\text{Total}_{\text{días que recibe 5 Bs}} = 5 \text{ días} + 5 \text{ días} + 5 \text{ días} + 5 \text{ días} = 20 \text{ días}$$

Sea Q_{Bs} la cantidad de dinero que tendrá que ahorrar cada día de los 5 Bs que recibe de su mama para que su ahorro acumulado sea 70 Bs en los 20 días, es decir:

$$70 \text{ Bs} = \underbrace{Q_{\text{Bs}} + Q_{\text{Bs}} + Q_{\text{Bs}} + \cdots + Q_{\text{Bs}}}_{20 \text{ veces}} = 20 \cdot Q_{\text{Bs}}$$

De donde

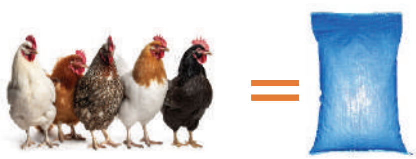
$$Q_{\text{Bs}} = \frac{70 \text{ Bs}}{20} = 3{,}5 \text{ Bs} \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{Bs}} = 3{,}5 \text{ Bs}$$

Respuesta

Tendrá que ahorrar 3 bolivianos con 50 centavos por día.

1872. Si Charly intercambia 5 gallinas por un quintal de arroz con un amigo, ¿cuántas gallinas necesitará para intercambiarlas por 10 quintales de arroz?

Resolución



Datos:
5 gallinas por 1 quintal
x gallinas por 10 quintales

Se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{5 \text{ gallinas}}{x \text{ gallinas}} = \frac{1 \text{ quintal}}{10 \text{ quintales}}$$

Entonces

$$x = \frac{10 \text{ quintales}}{1 \text{ quintal}} \cdot 5 \text{ gallinas} = 50 \text{ gallinas}$$

Respuesta

50 gallinas

1873. En un congreso de estudiantes se tiene 367 botellas de refresco con contenido. Al finalizar la reunión, quedan 78 botellas con contenido. ¿Cuántas botellas fueron utilizadas?

Resolución

Sea x la cantidad de botellas usadas.

Se plantea la ecuación según el enunciado del problema

$$367 - x = 78 \quad \Rightarrow \quad x = 289$$

Respuesta

Se utilizaron 289 botellas

1874. Se compra el quíntuple de pantalones que de camisas, si hubiera comprado 5 camisas más y 5 pantalones más , tendría el triple del número de pantalones que de camisas, ¿cuántas camisas y pantalones se compraron?

Resolución

Datos:
$P = 5x$ pantalones
$C = x$ camisas

Del enunciado, se tendría:

$$
\begin{aligned}
5x + 5 = 3(x+5) \quad &\Rightarrow \quad 5x + 5 = 3x + 15 \\
&\Rightarrow \quad 2x = 10 \\
&\Rightarrow \quad x = 5
\end{aligned}
$$

Luego:

$$P + C = 5(5) + 5 = 25 + 5 = 30 \quad \Rightarrow \quad P + C = 30$$

Respuesta
En total se compraron 25 pantalones y 5 camisas

1875. Un vendedor vende 2 productos distintos. Del primero obtiene una ganancia de 4 bolivianos por unidad y del segundo 13 bolivianos por unidad. Si al finalizar su jornada de ventas recauda una ganancia de 345 bolivianos, ¿cuántas unidades del segundo producto vendió, si del primero vendió solo 5 unidades?

Resolución

Sea x la cantidad de unidades del segundo producto.
Se plantea la ecuación de acuerdo al problema:

$$5 \cdot (4 \text{ Bs}) + x \cdot (13 \text{ Bs}) = 345 \text{ Bs}$$

De donde

$$13\,x = 345 - 5 \cdot 4 = 325 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{325}{13} = 25$$

$$\Rightarrow \quad x = 25$$

Respuesta

Del segundo producto se vendió 25 unidades

1876. Una organización ambiental en Bolivia invierte 10 000 Bs en un proyecto de reforestación, además el proyecto promete un crecimiento del 5% anual, ¿cuánto dinero tendrá la organización después de 3 años?

Resolución

Datos:

A = ? Dinero acumulado
P = 10 000 Bs Inversión inicial
r = 5% Tasa de interés
n = 1 Interés compuesto por año
t = 3 Tiempo de años

La fórmula del interés compuesto es:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

y el interés viene dado por:

$$r = 5\% \Longrightarrow r = \frac{5}{100} = 0{,}05 \Longrightarrow r = 0{,}05$$

Sustituyendo los valores:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \Longrightarrow A = 10\,000\left(1 + \frac{0{,}05}{1}\right)^{1 \cdot 3} = 10\,000(1 + 0{,}05)^3$$

$$= 10\,000(1{,}05)^3 = 11\,576{,}25$$

Respuesta

Por tanto, la organización obtendrá aproximadamente 11 576,25 Bs. después de 3 años.

1877. Una ONG en Bolivia dedica 8000 Bs a la conservación de vida silvestre, con un interés compuesto del 6% semestral, ¿cuánto valdrá la inversión después de 4 años?

Resolución

Datos:

$A = ?$	Dinero acumulado
$P = 8000$ Bs	Inversión inicial
$r = 6\%$	Tasa de interés
$n = 2$	Interés compuesto por año (semestral)
$t = 4$	Tiempo de años

Para la tasa de interés:

$$r = 6\% \Longrightarrow r = \frac{6}{100} = 0{,}06 \Longrightarrow r = 0{,}06$$

Sustituyendo los valores

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \Longrightarrow A = 8000\left(1 + \frac{0{,}06}{2}\right)^{2\cdot 4} = 8000(1 + 0{,}03)^{8}$$

$$= 8000(1{,}03)^{8} = 10\,134{,}16$$

Respuesta

La inversión valdrá 10 134,16 Bs después de 4 años.

1878. Una empresa textil invierte Bs 750 000 en la expansión de su planta de producción. Esta expansión permite un incremento del 5% anual en la producción, ¿cuál será la producción total después de 12 años?

Resolución

Reemplazando los datos en la fórmula del interés compuesto:

$$A = P \cdot (1 + r)^t$$
$$= 750\,000 \cdot (1 + 0{,}05)^{12}$$
$$= 1\,346\,892{,}25$$

Datos:

P: Capital de producción inicial
P = 750 000
$r = 0{,}05$
$t = 12$

Incógnita:

A: Capital total

Respuesta

La producción total de la empresa textil, después de 12 años será aproximadamente de 1 346 892 bolivianos.

1879. Si el interés ganado de un depósito en una institución financiera es de 90 bs en dos meses, ¿cuánto se ganó de interés el primer mes, si el segundo mes se ganó el doble que el primer mes?

Resolución

Sean:
x: bolivianos que ganó el primer mes.
$2x$: el interés ganado del segundo mes.
90 bolivianos es la suma de intereses de los dos meses
Luego, la ecuación planteada según el problema es:

$$x + 2x = 90 \quad \Rightarrow \quad 3x = 90 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{90}{3} = 30$$

$$\Rightarrow \quad x = 30 \text{ Bs}$$

Respuesta

El interés ganado en el primer mes es 30 bolivianos.

1880. Si la rebaja de un producto es del 5% por unidad, ¿cuántas unidades se podrán comprar con 450 bolivianos de ese producto, si el costo por unidad del producto es 15 bolivianos sin el descuento?

Resolución

Con el descuento por unidad será:

100 % del producto es 15 bolivianos
95 % del producto es y bolivianos

De donde

$$\frac{100\ \%}{95\ \%} = \frac{15 \text{ Bs}}{y \text{ Bs}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{15 \text{ Bs}}{100\ \%} \cdot 95\ \%$$

$$\Rightarrow \quad y = 14{,}25 \text{ Bs}$$

Con este precio con descuento se tendrá x unidades del producto:

$$450 \text{ Bs} = 14{,}25 \text{ Bs} \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{450 \text{ Bs}}{14{,}25 \text{ Bs}}$$

$$\Rightarrow \quad x = 31{,}58$$

Como no se pueden comprar fracciones de una unidad, se podrán comprar aproximadamente, 31 unidades con 450 bolivianos.

Respuesta

Se compran 31 unidades

1881. Un panadero gasta 350 bolivianos en producir 700 panes, utilizando el 25 % del gasto en mantequilla.

a) ¿Cuánto dinero cuesta la mantequilla en cada pan si al realizar el pan la mantequilla se distribuye uniformemente en proporciones iguales a cada pan fabricado?

b) ¿El costo de la mantequilla en cada pan será igual al 25 % del costo de cada pan?

Resolución

Datos:

700 panes cuestan 350 Bs

1 pan cuesta x Bs

25 % de gasto en mantequilla es y Bs

100% del gasto es 350 Bs

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} 700 \text{ panes} \longrightarrow 350 \text{ Bs} \\ 1 \text{ pan} \longrightarrow x \text{ Bs} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad x = \frac{350 \text{ Bs}}{700 \text{ panes}} \cdot 1 \text{ pan}$$

$$\Longrightarrow \quad x = 0{,}5 \text{ Bs}$$

Ahora, calculando la cantidad de dinero que es el 25% del gasto total:

$$\left.\begin{array}{l} 25\ \% \longrightarrow y \text{ Bs} \\ 100\ \% \longrightarrow 350 \text{ Bs} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad y = \frac{25\ \%}{100\ \%} \cdot 350 \text{ Bs}$$

$$\Longrightarrow \quad y = 87{,}5 \text{ Bs}$$

Como la mantequilla está distribuida por partes iguales en cada pan, el costo de la mantequilla en cada pan CM_p será:

$$CM_P = \frac{87{,}5 \text{ Bs}}{700 \text{ panes}} = 0{,}13 \text{ Bs} \quad \Rightarrow \quad CM_P = 0{,}13 \text{ Bs}$$

Respuesta

a) 0,13 Bs es lo que cuesta la mantequilla de cada pan.
b) Los 0,13 Bs es el 25% del costo de cada pan.

1882. Unos padres de familia sacan un préstamo de 19 000 bolivianos y pagaron 21 200 bolivianos al final de un año, ¿cuál fue el porcentaje de interés que se aplicó?

Resolución

C_i : Capital inicial 19 000 bolivianos
C_f: Capital final 21 200 bolivianos
I : taza de interés
$I = 21\,200 - 19\,000 = 2200$

En un año, el porcentaje de interés será:

$$2200 = 19000 \cdot i \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{2200}{19\,000} = 0{,}1158$$

$$\Rightarrow \quad i = 0{,}1158 \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad i = 11{,}58\ \%$$

Respuesta

El porcentaje de interés que se cobró es de 11,58 %

1883. Una familia decidió invertir 5000 bolivianos en un banco que ofrece un interés simple del 4% anual, ¿cuánto dinero tendrán al cabo de 3 años si no retira ninguna ganancia?

Resolución

C_i : Capital inicial 5000 Bs
i : Tasa de interés anual 4 %
$4\% = 0{,}04$
t : Tiempo 3 años

Por la fórmula de interés simple:

$$I = C_i \cdot i \cdot t = 5000 \cdot (0{,}04) \cdot 3 = 600 \quad \Rightarrow \quad I = 600 \text{ Bs}$$

Ganancia total G_T:

$$G_T = C_i + I = 5000 + 600 = 5600 \quad \Rightarrow \quad G_T = 5600 \text{ Bs}$$

Respuesta

La familia tendrá 5600 bolivianos

1884. Un fondo invierte 18 000 Bs para la conservación del Lago Titicaca, con una tasa de interés anual del 4% compuesta trimestralmente. ¿cuántos años necesitará el fondo para crecer a 25 000 Bs?

Resolución

$A = 25\,000$ Dinero acumulado
$P = 18\,000$ Inversión inicial
$r = 0{,}04$ Tasa de interés
$n = 4$ Interés compuesto por año
$t = ?$ Tiempo de años

La fórmula del interés compuesto es:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \Rightarrow \frac{A}{P} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \quad //\ln(\ )$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{A}{P}\right) = \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln\left(\frac{A}{P}\right)}{n \cdot \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)} = t$$

Reemplazando datos:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{25\,000}{18\,000}\right)}{n \cdot \ln\left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{25}{18}\right)}{4 \cdot \ln(1{,}01)} = 8{,}25 \approx 8$$

Respuesta

El fondo necesitará aproximadamente 8 años.

1885. Una planta de ensamblaje de vehículos invierte Bs 1 000 000 en mejorar la eficiencia de sus procesos productivos. Se espera que esta inversión incremente la eficiencia en un 8% anual, ¿cuál será la eficiencia después de 7 años?

Resolución

Datos

P: Capital de producción inicial

$P = 1\,000\,000$

$r = 0{,}08$

$t = 7$

Incógnita:

E: Eficiencia de la inversión

Asumiendo que la inversión se hizo con un interés del tipo compuesto, reemplazando los datos tenemos:

$$E = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}08)^7$$

$$\approx 1\,713\,825$$

Respuesta

La eficiencia de la inversión de la planta de ensamblaje será de 1 713 825 bolivianos.

1886. Un conglomerado invierte Bs 200 000 en la línea de producción, lo que resulta en un aumento del 10% semestral en la producción gracias a las nuevas tecnologías implementadas, ¿cuál será el valor de la producción después de 5 años si el incremento se compone semestralmente?

Resolución

Reemplazando los datos del problema en la fórmula del interés compuesto, tomando en cuenta que este se capitaliza semestralmente:

$$V = 200\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^{2 \cdot 5}$$

$$\approx 325\,779$$

Datos:

P: Capital de producción inicial

$P = 200\,000$

$r = 0{,}1$

$t = 5$

$n = 2$

Incógnita:

V: Valor de la producción

Respuesta

El valor de la producción será aproximadamente de 325 779 bolivianos.

1887. Un señor decide invertir 8000 bolivianos en un negocio que ofrece un interés simple del 6% anual. Sin embargo, después de 2 años, decide retirar la mitad de las ganancias obtenidas, ¿cuánto dinero tendrá al final de los 2 años?

Resolución

C_i : Capital inicial 8000 Bs

i : Taza de interés anual 6 %

$6\% = 0{,}06$

t : Tiempo 2 años

El interés simple es

$$I = C_i \cdot i \cdot t = 8000 \cdot (0{,}06) \cdot 2 = 960 \quad \Rightarrow \quad I = 960 \text{ Bs}$$

La mitad de las ganancias obtenidas G_M:

$$G_M = \frac{I}{2} = \frac{960}{2} = 480 \quad \Rightarrow \quad G_M = 480 \text{ Bs}$$

Monto total M_T al final de dos años:

$$M_T = C_i + G_M = 8000 + 480 = 8480 \quad \Rightarrow \quad M_T = 8480 \text{ Bs}$$

Respuesta

Al final de 2 años, tendrá 8480 bolivianos

1888. Una persona decide invertir en dos bancos distintos. Uno de ellos ofrece un interés simple del 4% anual y el interés generado en este banco es una unidad menos que el interés generado en el otro banco, el cual ofrece un interés simple del 6% anual. Después de 2 años, el interés total generado en ambos bancos es de 500 bolivianos, ¿en cuál banco invirtió más?

Resolución

C_1 : Capital invertido en el primer banco
i_1 : Taza de interés anual $4\ \% = 0{,}04$ (primer banco)
C_2 : Capital invertido en el segundo banco
i_2 : Taza de interés anual $6\ \% = 0{,}06$ (segundo banco)
t : Tiempo 2 años (en ambos bancos)
I_1 : Interés en el primer banco
I_2 : Interés en el segundo banco

Por el enunciado se tiene el sistema:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 - 1 & (1) \\ I_1 + I_2 = 500 & (2) \end{cases}$$

La ecuación (1) en (2):

$$I_2 - 1 + I_2 = 500 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 250{,}5 \text{ Bs}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad I_1 = 249{,}5 \text{ Bs}$$

Por la fórmula de interés simple:

$$I_1 = C_1 \cdot i_1 \cdot t \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{I_1}{i_1 \cdot t} = \frac{249{,}5 \text{ Bs}}{(0{,}04) \cdot 2}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 3118{,}75 \text{ Bs}$$

$$I_2 = C_2 \cdot i_2 \cdot t \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{I_2}{i_2 \cdot t} = \frac{250{,}5 \text{ Bs}}{(0{,}06) \cdot 2}$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = 2087{,}5 \text{ Bs}$$

Respuesta

La persona invirtió más en el primer banco

1889. Si un agricultor tiene un terreno de 10 hectáreas y planta maíz en la mitad del terreno, ¿cuántas hectáreas de maíz tendrá el agricultor?

Resolución

Al plantar maíz en la mitad del terreno, sucede:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{ha}} = \frac{10 \text{ ha}}{2} = 5 \text{ ha}$$

Así, el agricultor tendrá 5 hectáreas de maíz.

Respuesta

5 hectáreas de maíz

1890. Una persona tiene una única deuda de 5000 Bs con una tasa de interés del 8% anual. Él decide pagar la deuda en pagos mensuales fijos. Si su ingreso mensual es de 2000 Bs y destina ⅓ de su ingreso al pago de la deuda y el resto lo usa para sus gastos, ¿cuánto pagará mensualmente para no tener ninguna deuda y cuánto le quedará para sus gastos?

Resolución

Datos:
$D_i = 5000$ Bs: deuda inicial
$i_2 = 8\ \%$: taza de interés anual $8\ \% = 0{,}08$
$I_M = 2000$ Bs: ingreso mensual
$P = {}^1/_3$: proporción del ingreso destinada al pago de la deuda

Sea:
x: es el pago mensual para pagar la deuda.
y: el monto que le sobrara para sus gastos.
Pago mensual para la deuda:

$$x = \frac{1}{3} \cdot 2000 \text{ Bs} = 666{,}67 \text{ Bs} \quad \Rightarrow \quad x = 666{,}67 \text{ Bs}$$

El interés mensual i_m será:

$$i_m = \frac{5000 \cdot 0{,}08}{12} = 33{,}33 \quad \Rightarrow \quad i_m = 33{,}33 \text{ Bs}$$

Pago mensual:

$$x = x + i_m = 666{,}67 + 33{,}33 = 700 \quad \Rightarrow \quad x = 700 \text{ Bs}$$

Lo que le resta:

$$y = 2000 - x = 2000 - 700 = 1300 \quad \Rightarrow \quad y = 1300 \text{ Bs}$$

Respuesta
Cada mes pagará 700 Bs y dispondrá de 1300 Bs para sus gastos.

1891. La producción de quinua en Bolivia aumentó en un 20% respecto al año pasado. Si el año pasado se produjeron 18 000 toneladas, ¿cuál es la producción de este año?

Resolución

Para determinar el aumento se tiene:

$$Aumento = Valor\ original \cdot \frac{Porcentaje\ de\ aumento}{100}$$

Datos:

P = 20% Porcentaje de aumento
V = 18 000 Valor original
A = ? Aumento

Reemplazando:

$$Aumento = 18\,000 \cdot \frac{20}{100} = 3600$$

Calculando la producción de este año:

$$Producción\ de\ este\ año = 18\,000 + 3600 = 21\,600$$

Respuesta

La producción de quinua este año será 21 600 toneladas.

1892. Una fábrica toma un préstamo de 400 000 bolivianos para comprar maquinaria a una tasa de interés compuesto anual del 7%, ¿cuánto deberá pagar la fábrica después de 5 años?

Resolución

Datos

P : Monto del préstamo
$P = 400\,000$
$r = 0{,}07$
$t = 5$

Incógnita:

D : Valor total de la deuda

Reemplazando los datos del problema en la fórmula del interés compuesto, tomando en cuenta que este se capitaliza anualmente:

$$D = 400\,000 \cdot (1 + 0{,}07)^5$$
$$\approx 561\,021$$

Respuesta

La deuda de la fábrica es de 561 021 bolivianos.

1893. La población de vicuñas en una reserva natural en Bolivia aumentó de 1500 a 2100 en un periodo de tiempo. ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento?

Resolución

Datos:

$P_i = 1500$ Población inicial

$P_f = 2100$ Población final

$P = ?$ Porcentaje de reducción

Recordando:

$$Crecimiento = \boldsymbol{Población\ final - Población\ inicial}$$

Reemplazando:

$$Porcentaje\ de\ Crecimiento = \left(\frac{\boldsymbol{Crecimiento}}{\boldsymbol{Población\ inicial}}\right) \cdot 100\,\%$$

$$Porcentaje\ de\ Crecimiento = \left(\frac{600}{1500}\right) \cdot 100 = 0{,}4 \cdot 100 = 40$$

Respuesta

El porcentaje de crecimiento de la población de vicuñas es del 40%.

1894. Una microempresa compró materiales e insumos por 8000 bolivianos, obteniendo un descuento del 15%, ¿cuánto pagó la microempresa finalmente?

Resolución

Datos:

El 15% de 8000 es:

$$8000 \cdot 15\% = 8000 \cdot \frac{15}{100} = 1200$$

Luego

$$8000 - 1200 = 6800$$

Respuesta

La microempresa pagó un total de 6800 bolivianos.

1895. Un médico recomienda que un paciente mantenga su frecuencia cardíaca entre el 60% y el 80% de su máxima durante el ejercicio. Si la frecuencia cardíaca máxima del paciente es 180 latidos por minuto, ¿cuál es el rango de frecuencia cardíaca recomendada?

Resolución

Frecuencias cardíacas:

$$f_1 = 60\ \% = \frac{60}{100}$$

$$f_2 = 80\% = \frac{80}{100}$$

Frecuencia máxima del paciente:

$$f_m = \frac{180 \text{ latidos}}{1 \text{ min}}$$

Rango de la frecuencia cardíaca:

$$f_{mín} = f_1 \cdot f_m = \frac{60}{100} \cdot \frac{180 \text{ latidos}}{1 \text{ min}} = 108 \Rightarrow f_{mín} = 108 \text{ latidos/min}$$

$$f_{máx} = f_2 \cdot f_m = \frac{80}{100} \cdot \frac{180 \text{ latidos}}{1 \text{ min}} = 144 \Rightarrow f_{máx} = 144 \text{ latidos/min}$$

Respuesta

El rango recomendado es de 108 a 144 latidos por minuto

1896. En una planta de cemento, se produjeron 30 000 bolsas, de las cuales 1500 salieron defectuosas, ¿cuál es el porcentaje de productos defectuosos y no defectuosos?

Resolución

El porcentaje de las unidades defectuosas es:

$$\frac{1500}{30\,000} \cdot 100 = 5\%$$

Luego, el porcentaje de las unidades no defectuosas es:

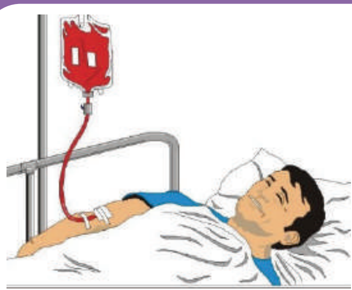
$$100\% - 5\% = 95\%$$

Respuesta

El porcentaje de productos defectuosos es del 5% y el porcentaje de productos no defectuosos es del 95%.

1897. Un paciente necesita recibir 500 ml de solución intravenosa en 4 horas. Si el equipo de goteo administra 15 gotas por ml, ¿a cuántas gotas por minuto debe ajustarse el goteo?

Resolución



500 ml de solución intravenosa en 4 horas, esto es:

$$S_I = \frac{500 \text{ ml}}{4 \text{ h}} = 125 \frac{\text{ml}}{\text{h}}$$

Equipo de goteo:

$$E_g = \frac{15 \text{ gotas}}{1 \text{ ml}}$$

x : ajuste del goteo

Luego:

$$x = S_I \cdot E_g = \frac{125 \text{ ml}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{15 \text{ gotas}}{1 \text{ ml}} = 1875 \Rightarrow x = 1875 \frac{\text{gotas}}{\text{h}}$$

Convirtiendo a gotas por minuto

$$x = 1875 \frac{\text{gotas}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} = 31{,}25 \quad \Rightarrow x = 31{,}25 \frac{\text{gotas}}{\text{min}}$$

Respuesta

El goteo debe ajustarse a 31 gotas por minuto

1898. Las nuevas políticas implantadas en una empresa de ensamblaje de celulares, hacen que la producción mensual aumente en un 15%. Sabiendo que la fábrica ensambla 20 000 celulares cada mes, ¿cuántas unidades adicionales se producen cada mes después de la mejora?

Resolución

Se calcula el aumento de la producción mensual:

$$20\,000 \cdot 15\% = 20\,000 \cdot \frac{15}{100}$$

$$= 3000$$

Así la producción incrementada es:

$$20\,000 + 3000 = 23\,000 \text{ unidades}$$

Respuesta

La fábrica produce 3000 unidades adicionales después de las nuevas políticas de empresa.

1899. Un conductor lleva en su camión sacos de azúcar de dos pesos distintos. Los sacos grandes tienen un peso de 30 kg mientras que los sacos pequeños son un 40 % menos. El conductor recuerda que el número de sacos pequeños es cuatro veces a la cantidad de sacos grandes, y que el peso total de la mercancía es de 204 kg. Calcular el número de sacos de cada tipo que se transportan.

Resolución

x: número de sacos grandes
y: número de sacos pequeños
Los sacos pequeños pesan un 40 % menos que los grandes:

$$30 \cdot 40\% = 30 \cdot \frac{40}{100} = 12; \quad p = 30 - 12 = 18$$

Del enunciado se tiene el sistema: $\begin{cases} y = 4x & (1) \\ 30x + 18y = 204 & (2) \end{cases}$

La ecuación (1) en (2):

$$30x + 18(4x) = 204 \quad \Rightarrow \quad 102x = 204 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Luego, reemplazamos $x = 2$ en (1): $y = 4(2) \quad \Rightarrow \quad y = 8$

Respuesta

Se transportan 2 sacos grandes y 8 sacos pequeños

1900. Se tiene una mezcla alcohólica de 240 litros para desinfección, donde el volumen de agua representa el 60 % del volumen de alcohol puro. ¿Cuántos litros de alcohol puro se debe agregar a la mezcla para obtener una mezcla alcohólica de 80 %?

Resolución

Datos

x: litros de alcohol puro
$y = 240$ litros de mescla
y_0: volumen del alcohol puro inicial
El volumen de agua es 60 %, entonces el 40 % es la mezcla total del alcohol puro.

Luego, para agregar una cantidad x litros de alcohol puro a la mezcla de 240 litros, la nueva mezcla alcohólica al 80% en proporción es:

$$y_0 = 40\% \cdot 240 = (0,4) \cdot 240 = 96 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 96\ L$$

$$\frac{96 + x}{240 + x} = 80\ \% \quad \Rightarrow \quad 96 + x = (0,8)(240 + x)$$

$$\Rightarrow \quad 0,2x = 96 \quad \Rightarrow \quad x = 480\ L$$

Respuesta

Se deben agregar 480 litros de alcohol puro.

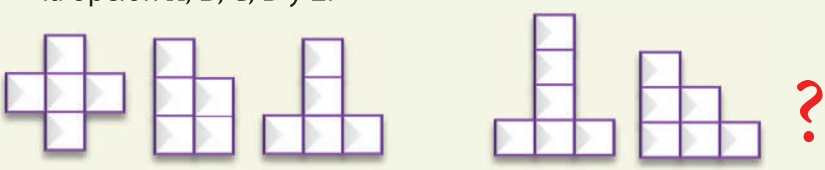
1901. Determinar qué figura corresponde en el espacio en blanco, entre la opción A, B, C y D

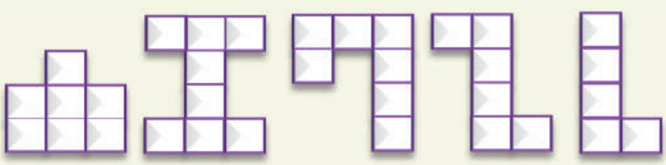
A *B* *C* *D*

Resolución

En las primeras 3 figuras, cada figura está dividida en 3 y una parte coloreada. En las figuras 4 y 5 se puede ver que cada figura, están dividida en 2 partes y una está coloreada con un segmento que pasa por los cortes de la figura, por tanto se espera tener una figura que este dividida en dos, coloreada una parte y que salga un segmento de la figura, que sería la figura *D*.

1902. Determinar qué figura corresponde en el espacio en blanco, entre la opción A, B, C, D y E.

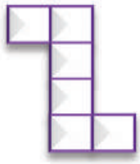




A *B* *C* *D* *E*

Resolución

Las primeras 3 figuras tienen la relación de estar formadas por 5 cuadrados, las figuras 3 y 4 estarian formadas por 6 cuadrados, siguiendo este patrón debería haber una figura formada por 6 cuadrados que es el inciso D, tal que:

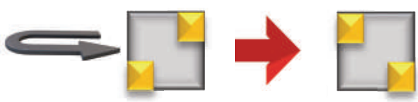


1903. Se observa una relación entre las dos primeras figuras. Elija, de las opciones restantes, la figura que posea una relación análoga con la tercera figura.

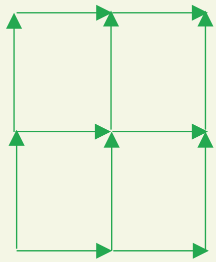
Resolución

La primera figura es como si diera un giro de 180° grados, llegando a la segunda figura, es decir:

Siguiendo ese patrón en la tercera figura se tendrá:

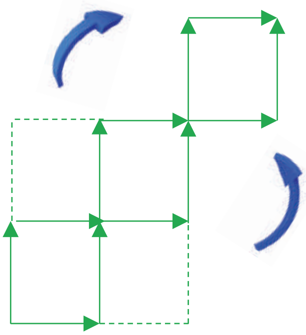


1904. Moviendo cuatro palitos con forma de flecha en la siguiente figura, formar 3 cuadrados iguales y exactos.



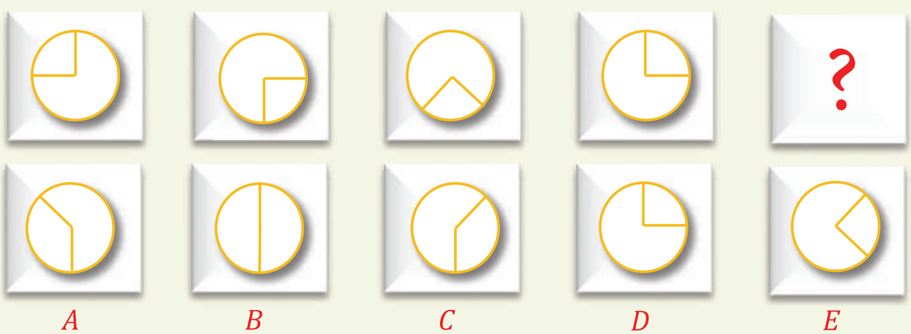
Resolución

En la figura se mueven las flechas de las esquinas del cuadrado, llevándolas en la parte superior, al lado derecho del cuadrado, como se muestra en la siguiente figura:



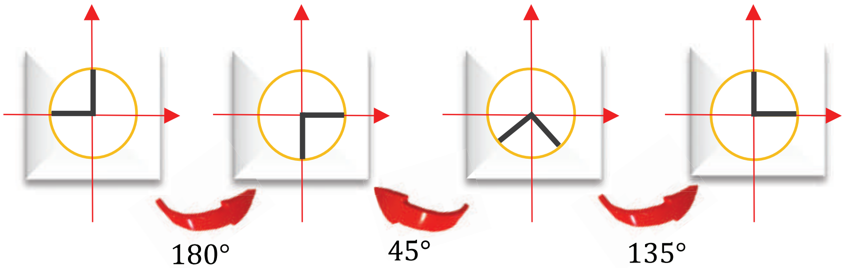
Así, son 3 cuadrados exactos del mismo tamaño.

1905. Siguiendo la secuencia en las imágenes, ¿qué figura sigue?



Resolución

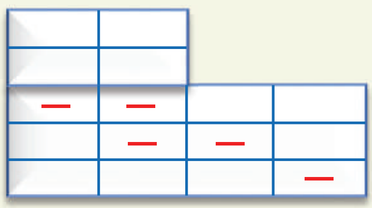
Se puede deducir el giro que hace desde la primera figura, es decir:



En la transición de A a B, da un giro a la derecha de 180° grados, luego al lado izquierdo cae 45°, luego vuelve a subir 135°, siguiendo esta deducción, tendría que caer 45°, por lo que seguiría la figura E.

E

1906. ¿Cuantos cuadriláteros se pueden formar sin que contengan el signo "—" , de máximo 3 cuadrilateros?



Resolución

Se debe hacer un conteo de un cuadrilátero formado por una sola figura, por dos figuras y por tres figuras, es decir:

$$11 + 5 + 4 + 1 = 21$$

Por tanto hay 21 cuadriláteros en la figura.

1907. ¿Qué número debe estar en el lugar de la figura ⊛ para que las operaciones indicadas sean exactas?

$$43 + \circledast + 7 = 54 - 1$$

Resolución

En lado derecho de la igualdad tenemos:

54-1=53

También debería sumar la misma cantidad el lado izquierdo, es decir:

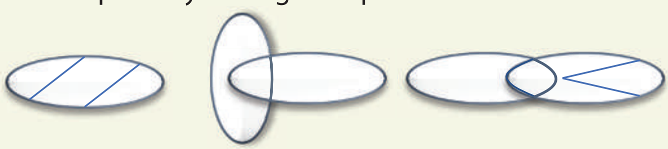
$$43 + \circledast + 7 = 53$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\circledast = 3}$$

Por tanto, el número es 3. Respuesta: 3

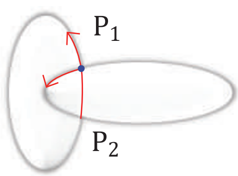
1908. En las figuras dadas. ¿cuál de las figuras se puede dibujar sin levantar el lapicero y sin regresar por el mismo sitio?



(1) (2) (3)

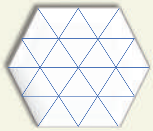
Resolución

La figura (2) se puede dibujar sin levantar el lapicero y sin regresar por el mismo sitio:



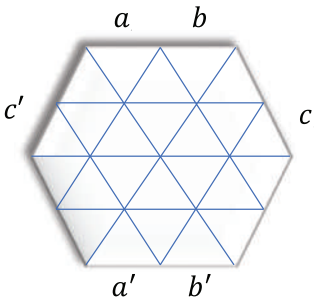
Empezando por el punto P_1 moviéndose en contrario de las manecillas del reloj y llegando de nuevo al punto P_1 y en el mismo sentido llegando de nuevo al punto P_1.

1909. ¿Cuántos hexágonos regulares hay en la figura dada?

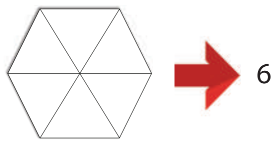


Resolución

Descomponiendo el hexágono y contando por lados:



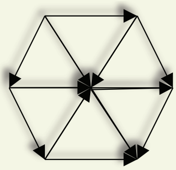
Hexágono de lados a, b, c, a', b', c'



Hexágono de lado $a + b$ es solo 1.

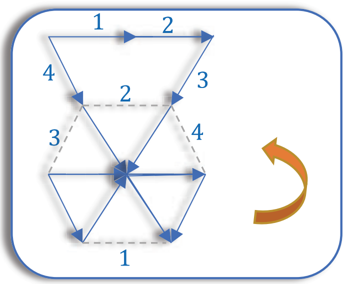
Por tanto, hay 7 hexágonos regulares.

1910. Moviendo cuatro flechas, hacer que aparezcan en la figura solo tres triángulos equiláteros.



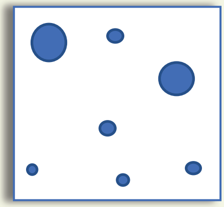
Resolución

Se designa con números las flechas a mover, como se ve en la figura:



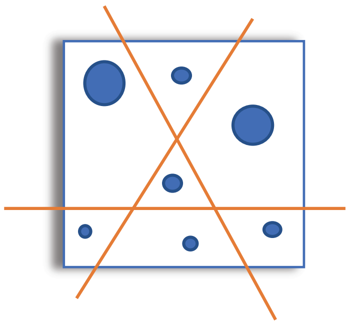
Se movió 4 flechas y aparecen solo 3 triángulos equiláteros.

1911. La figura dada, deberá ser dividida por tres líneas rectas y en siete partes, de modo que en cada parte haya un círculo.



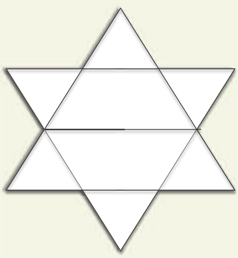
Resolución

En la figura, observe que el círculo casi en medio deberá estar cerrado por tres líneas, como se muestra a continuación:



Por tanto, la figura es dividida en siete partes y contiene un único círculo.

1912. Dada la figura. ¿Cuántos triángulos hay?

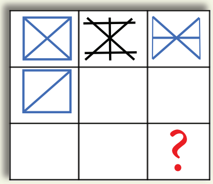


Resolución

Descomponiendo las figuras y contando cada región, como sigue:

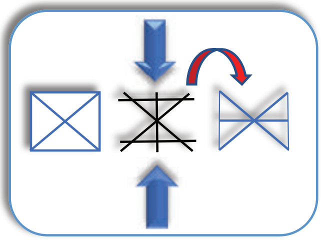
En total hay 10 triangulos.

1913. Dada la siguiente matriz de figuras, completarla para encontrar el elemento señalado con "?"

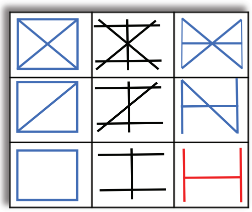


Resolución

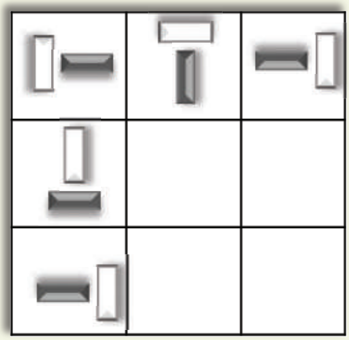
En la primera fila, el primer cuadrado de la primera casilla pasa a perder sus lados laterales y comprimirse un poco, para después girar 90° en sentido horario y descomprimirse.



En la primera columna, el mismo cuadrilátero empieza a perder diagonales, quedando con solo una al empezar la segunda fila.

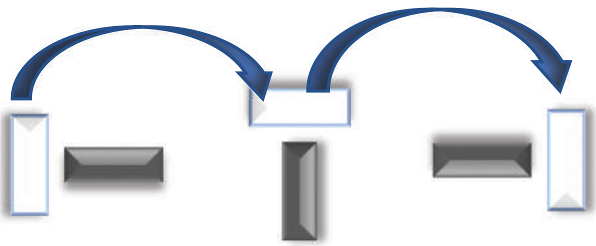


1914. Completa la matriz de figuras con las adecuadas al patrón mostrado.

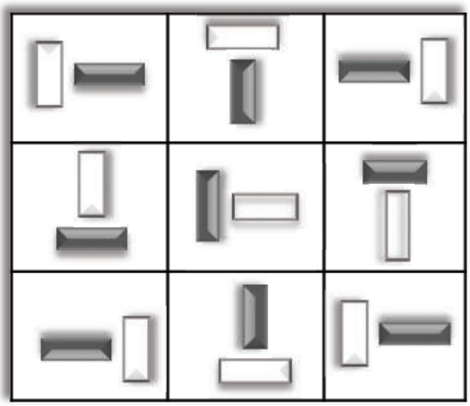


Resolución

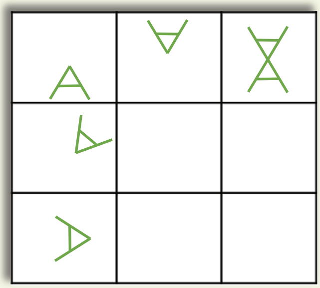
Obtenemos la segunda figura de la primera fila, rotándola 90° y la tercera la obtenemos rotando la misma medida a la segunda antes rotada:



Este mismo método se emplea para las primeras figuras de la segunda y tercera fila.



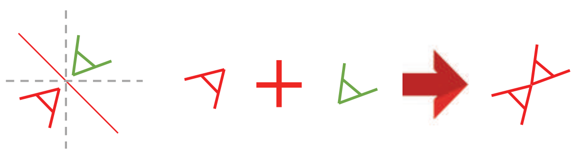
1915. Completar la matriz de figuras con aquellas que estén acorde a las mostradas.



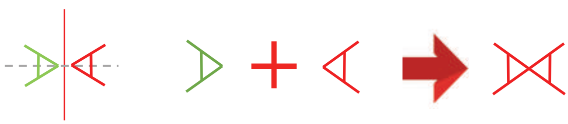
Resolución

La tercera figura de la primera fila, resulta de las dos figuras anteriores:

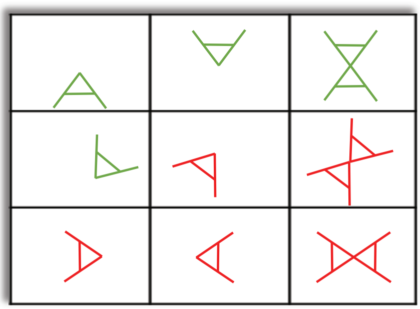
Las figuras de la segunda fila siguen el mismo patrón, donde la segunda correspondiente se obtiene a partir de la primera, haciendo una reflexión sobre el eje y rotado 45° en sentido antihorario. Luego las unimos como en la primera fila:



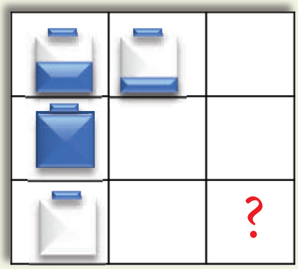
La tercera fila se completa usando una reflexión como en la fila anterior, pero esta vez respecto al eje y sin rotaciones, luego las unimos como en las filas anteriores:



Por tanto:



1916. Hallar el elemento que corresponde en la figura al signo de interrogación.



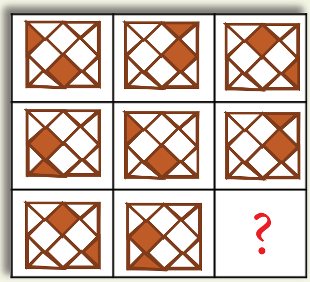
Resolución

Estos elementos siguen el siguiente patrón que se repite:

Observemos que los elementos de la primera columna y los que completarán la segunda y tercera columna aparecen en la sucesión. De este modo:

Luego el elemento de la figura que corresponde es:

1917. En la siguiente matriz de figuras, encontrar la que falta.

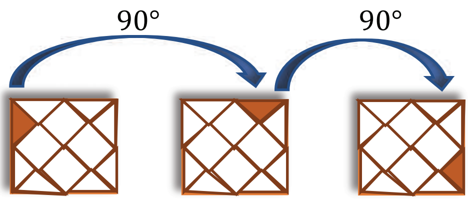


Resolución

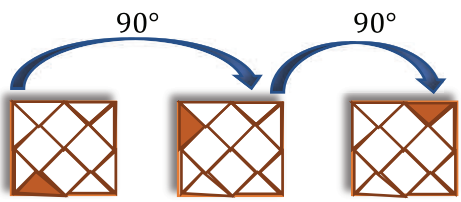
Cada figura presenta un cuadrado inscrito dividido en cuatro cuadrados, a su vez rodeado de triángulos, acomodados de tal forma que forman otro cuadrado.

En cada fila se puede notar el siguiente comportamiento:

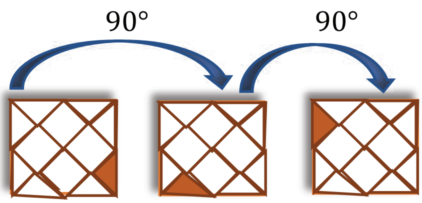
Fila 1:



Fila 2:

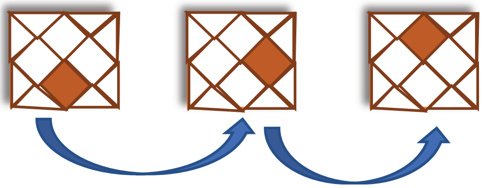


Fila 3:

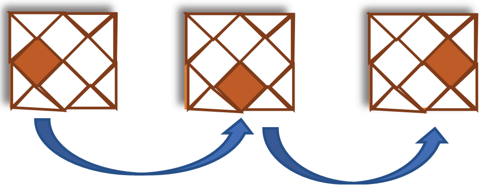


También se observa lo siguiente:

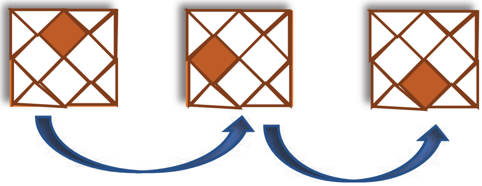
Fila 1:



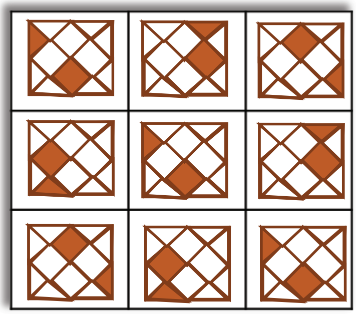
Fila 2:



Fila 3:



La figura es:



1918. Si Juan dice "estoy mintiendo", ¿qué regla se debe aplicar para evitar contradicciones?

a) Permitir declaraciones contradictorias.
b) Prohibir declaraciones sobre la veracidad de uno mismo.
c) Considerar todas las declaraciones como verdaderas.
d) Ignorar las declaraciones que no se pueden verificar.

Resolución

Si se aplica el inciso a) no nos libra de contradicciones, seguiríamos teniendo casos donde la afirmación será tanto falsa como cierta.

Si se aplica el b) en cambio, soluciona el problema, cuando Juan habla de la veracidad de sí mismo ocurren las contradicciones, si prohibimos esto nos libramos del problema.

Si se aplica el c) solo nos llevará a decir que Juan dice la verdad, pero como su afirmación es "estoy mintiendo" y dijimos que es verdad, Juan miente, dice algo falso, de nuevo una contradicción.

Si se aplica el d) es como tapar el sol con un dedo, no nos permite evitar contradicciones, solo ignorarlas no hará que desaparezcan.

Respuesta: Prohibir declaraciones sobre la veracidad de uno mismo.

1919. Queremos averiguar quién dice la verdad entre cuatro personas **A**, **B**, **C** y **D**. Sabemos que solo uno dice la verdad y los demás mienten, además:
A dice que **B** miente, **B** dice que **D** miente, **C** dice que **C** no miente y **D** dice que **B** miente.

Resolución

Supongamos que A es quien dice la verdad, como A dijo que B miente, si A dice la verdad, B miente, y B nos dijo que D miente, lo que tendría que ser una mentira pues B miente, así que D no miente, pero B dice que D miente. Suponer que A dice la verdad nos lleva a una contradicción, por tanto, A no dice la verdad, pues nos lleva a conclusiones falsas.

Supongamos que C dice la verdad, si C dice que C no miente, C dice la verdad. Nadie más menciona a C y como solo uno dice la verdad, entonces lo que otros dicen tendría que ser mentira. Veamos, B dice que D miente, si es mentira, D dice la verdad, entonces B y D dirían la verdad, lo que es una contradicción pues solo hay una persona que dice la verdad y aquí ya habrían 2. Por tanto, descartamos que C diga la verdad.

Supongamos que D dice la verdad, si D dice la verdad, todos los demás mienten y A dice que B miente, si eso fuera mentira, B no miente, eso es una contradicción, tanto D como B no mentirían, pero sabemos que solo uno es honesto. Suponer que D dice la verdad nos lleva a una contradicción, lo cual descarta que D diga la verdad.

Supongamos que B dice la verdad. B dice que D miente, y D dice que B miente, pero como D miente (nos lo dijo B, quien es honesto), B no miente, no hay contradicciones. Hasta ahora. C y D estarían mintiendo. Esta es la única opción sin contradicciones.

1920. ¿Qué letra continúa?

A, D, H, M, …

Resolución

Veamos el abecedario para encontrar algún patrón.

– Entre A y D hay 2 letras.

– Entre D y H hay 3 letras.

– Entre H y M hay 4 letras.

La letra que continua debe estar a 5 letras de M.

La letra que continúa es R.

A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z

2 3 4 5

1921. Hallar la fecha intrusa semántica y sintácticamente:

a) 27 de mayo **b)** 19 de marzo **c)** 30 de febrero

Resolución

Semánticamente las fechas podrían tener un significado. Por ejemplo, en el contexto de Bolivia, las fechas a) y b) corresponden a celebraciones del día de la madre y el padre, respectivamente. Por tanto, el intruso es c).

1922. Andrés se pregunta si hoy es sábado, ¿qué día de la semana será en 2025 días?

Resolución

Es importante que, si hoy es sábado, pasados 7 días volverá a ser sábado, pasados 14 días volverá a ser sábado y pasados $7 \cdot k$ días volverá a ser sábado.
Aquí es importante conocer el resto al dividir 2025 entre 7:

$$
\begin{array}{r|l}
2025 & 7 \\ \cline{2-2}
-14 & 289 \\ \cline{1-1}
62 & \\
-56 & \\ \cline{1-1}
65 & \\
-63 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}
$$

Al efectuar la división larga, el resto es igual a 2 y luego

$$2025=7\cdot289+2.$$

En 2025 días será sábado de nuevo y en 2 días más será lunes.

1923. Carmela debe calcular la suma de los dígitos de la siguiente diferencia de cuadrados:

$$(555\ 555\ 557)^2 - (444\ 444\ 443)^2$$

Resolución

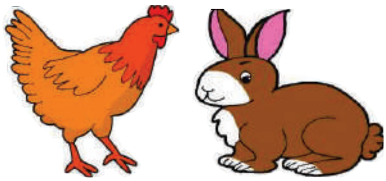
Como sugiere el problema, se tiene una diferencia de cuadrados, igual a:

$$(555\ 555\ 557)^2 - (444\ 444\ 443)^2$$
$$=(555\ 555\ 557-444\ 444\ 443)\cdot(555\ 555\ 557-444\ 444\ 443)$$
$$=111\ 111\ 114\cdot 1\ 000\ 000\ 000=111\ 111\ 114\ 000\ 000\ 000$$

Luego, sumando los dígitos de $(555\ 555\ 557)^2-(444\ 444\ 443)^2$ obtenemos $1+1+1+1+1+1+1+1+4=12$.

1924. En el corral de la granja de Francisco, hay conejos y gallinas. Se pueden contar 35 cabezas y 94 patas, ¿cuántos animales hay de cada clase?

Resolución



Sean:
x: La cantidad de conejos.
y: La cantidad de gallinas
Con las incógnitas ya aclaradas, se puede deducir que:

- No existe animal alguno con 2 cabezas, por tanto $x + y = 35$.
- Las gallinas tienen 2 patas y los conejos 4 patas, luego $4x + 2y = 94$.

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 4x + 2y = 94 \end{cases}$$

obtenemos $x = 12$ y $y = 23$.

1925. Estime la cantidad de kilogramos de lana que se obtienen al trasquilar a una oveja, sabiendo que el peso promedio estimado de una oveja adulta es de 100 kg y su tiempo de vida productiva promedio es de aproximadamente 6 años.

Resolución

Datos

P: Peso total promedio de una oveja adulta antes de ser trasquilada.

$\mathrm{P} = 100$ kg

V: Vida productiva promedio de una oveja

$\mathrm{V} = 6$ años

Incógnita:

$\mathrm{P_L}$: Peso de la lana

Supongamos que se trasquila a una oveja una vez por año, de modo que esta pierde en promedio un 5% de su peso total estando ya trasquilada. Así, la cantidad de lana que se obtiene anualmente es:

$$100 \cdot \frac{5}{100} = 5$$

La oveja tiene un promedio de vida útil de 6 años, por tanto

$$6 \text{ años} \cdot 5 \frac{1}{\text{año}} \text{kg} = 30 \text{ kg}$$

Por tanto, son aproximadamente 30 kilogramos los que se obtienen de una oveja durante toda su etapa productiva.

1926. Nora se pregunta acerca de la cantidad en litros de agua que una persona puede consumir en toda su vida, sabiendo que la cantidad estimada de consumo recomendada es de 2 litros diarios y la esperanza de vida de una persona es de 80 años.

Resolución

Datos

C: Cantidad de agua estimada de consumo por día.

$C \approx 2$ L

E: Esperanza de vida de una persona.

$E \approx 80$ años

Estimamos el consumo transformando los años a días:

$$80 \text{ años} \cdot \frac{365 \text{ días}}{1 \text{ año}} = 29\,200 \text{ días}$$

Multiplicamos la cantidad de días por el consumo diario de agua, para obtener el consumo en litros:

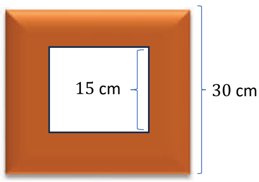
$$29\,200 \cdot 2 \text{ L} = 58\,400 \text{ L}$$

El consumo estimado de agua durante toda la vida de una persona es de 58 400 L.

1927. Aarón compró un marco cuadrado de 30 cm por el lado externo y 20 cm por el interno. Si por cada centímetro cuadrado se pagó Bs 1,50, ¿cuál es el importe del marco?

Resolución

Del gráfico:



Datos

C: costo por centímetro cuadrado.

$$C = 0{,}50\,\frac{\text{Bs}}{\text{cm}^2}$$

Calculamos las áreas de los cuadrados de lados 30 y 15 respectivamente:

$$A_1 = (30\text{ cm})^2 = 900\text{ cm}^2 \text{ y } A_2 = (15\text{ cm})^2 = 225\text{ cm}^2$$

Restando las áreas de los cuadrados obtenemos:

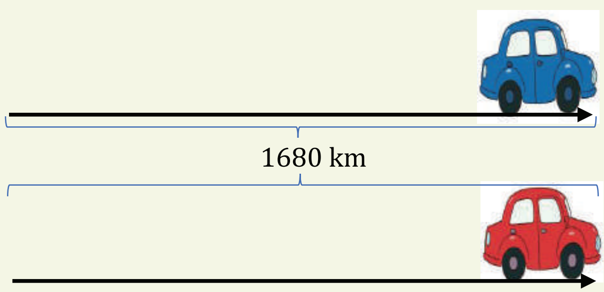
$$900\text{ cm}^2 - 225\text{ cm}^2 = 725\text{ cm}^2$$

Luego,

El monto que Aarón pagó por el marco es de Bs 362,5.

$$725\text{ cm}^2 \cdot \frac{0{,}5\ \text{Bs}}{1\text{ cm}^2} = 362{,}5\text{ Bs}$$

1928. Dos automóviles realizaron un viaje de 1680 kilómetros. El primero tuvo un rendimiento de 14 km por litro de combustible y el segundo tuvo un rendimiento de 12 km por litro, ¿cuál es la diferencia entre el consumo de combustible de los automóviles?



Resolución

Utilizando regla de tres, calculamos el consumo de combustible para los dos automóviles:

Para el primer automóvil:

$$\begin{array}{ccc} 1\text{ L} & \rightarrow & 14\text{ km} \\ x & \rightarrow & 1680\text{ km} \end{array}$$

Luego

$$x = \frac{1680\text{ km} \cdot 1\text{ L}}{14\text{ km}} = 120\text{ L}$$

Para el segundo automóvil:

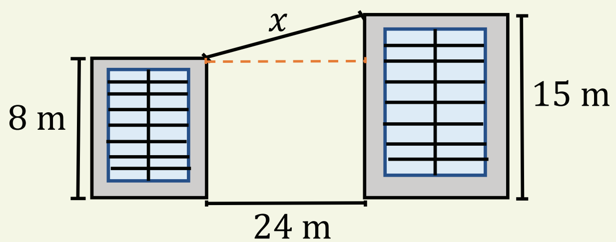
$$\begin{array}{ccc} 1\text{ L} & \rightarrow & 12\text{ km} \\ y & \rightarrow & 1680\text{ km} \end{array}$$

Luego

$$y = \frac{1680\text{ km} \cdot 1\text{ L}}{12\text{ km}} = 140\text{ L}$$

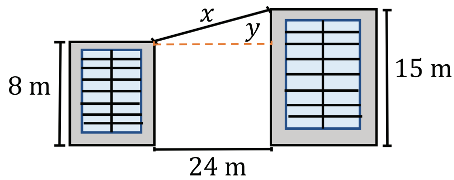
La diferencia del consumo es de 20 L.

1929. Encuentre el valor x o la distancia entre los extremos de los edificios verticales.



Resolución

Del gráfico, sólo es necesario determinar un cateto del triángulo rectángulo:



$$y = 15 \text{ m} - 8 \text{ m} = 7 \text{ m}$$

Notamos que el segmento punteado de color naranja mide la misma cantidad que la distancia entre ambos edificios, luego por el teorema de Pitágoras:

$$x = \sqrt{(24 \text{ m})^2 + (7 \text{ m})^2} = 25 \text{ m}$$

El valor de la distancia pedida es $x = 25$ m.

1930. Hallar la oración intrusa semánticamente:

a) Llueve y hay nubes
b) Llueve y no nos mojamos
c) Llueve, entonces el fuego arde más

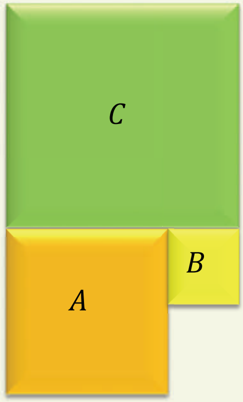
Resolución

Recordando:

Semántica es el estudio de los símbolos (en nuestro caso palabras, frases) y su relación con la realidad (en nuestro caso con la veracidad o falsedad)

Semánticamente: Las oraciones a y b tienen una relación lógica directa entre el hecho de que llueva y el efecto o la condición relacionada (nubes, no mojarse). En cambio, la oración c presenta una relación ilógica y contradictoria, ya que la lluvia usualmente apaga el fuego en lugar de hacerlo arder más

1931. Los siguientes terrenos cuadrados de un área de la ciudad se ven en la figura:



Se pide encontrar el cociente entre la suma de los perímetros de A y B y el perímetro de C.

Resolución

Sean a, b y c los lados correspondientes a los cuadrados A, B y C, respectivamente.

De la figura:

$$c = a + b$$

Calculando los perímetros:

$$P_A = 4a; P_B = 4b; P_C = 4c$$

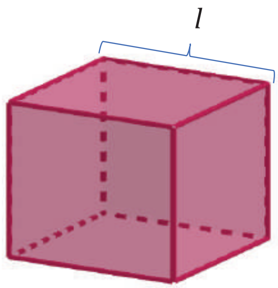
Se debe encontrar:

$$\frac{P_A + P_B}{P_C} = \frac{4a + 4b}{4c} = \frac{4 \cdot (a + b)}{4c} = \frac{4c}{4c} = 1$$

El valor pedido es 1.

1932. Katrina necesita averiguar el lado de un cubo cuya superficie está expresada por el mismo número que su volumen.

Resolución



Descartamos el caso $l = 0$.

Según el problema:

$6l^2 = l^3$

Resolviendo esta ecuación:

$l^3 - 6l^2 = l^2\,(l - 6) = 0$

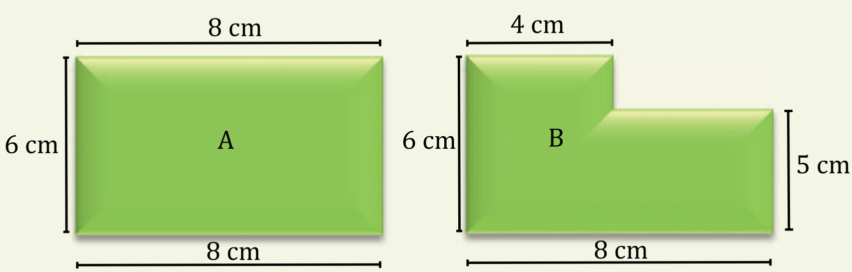
de donde

$l = 6$

El lado del cubo es $l = 6$.

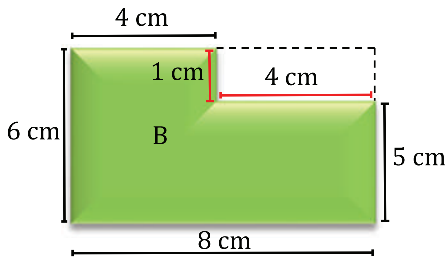
Respuesta: $l = 6$

1933. Mónica recorta un rectángulo A de una hoja de papel lustroso y luego corta la figura B a partir de A. Sabiendo que todos los cortes fueron paralelos a los lados del rectángulo original, ¿qué conclusiones se pueden obtener al comparar los perímetros y las áreas de A y B?



Resolución

Del problema, ya que los cortes fueron paralelos a los lados del rectángulo, las medidas restantes respecto a B son:



Ahora se procede a calcular los perímetros (P_A,P_B) y las áreas (S_A,S_B) de A y B:

$$P_A = 6\text{ cm} + 6\text{ cm} + 8\text{ cm} + 8\text{ cm} = 28\text{ cm}$$

$$P_B = 6\text{ cm} + 5\text{ cm} + 8\text{ cm} + 4\text{ cm} + 1\text{ cm} + 4\text{ cm} = 28\text{ cm}$$

$$S_A = 6\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 48\text{ cm}^2$$

El área total de B será:

$$S_B = (5\text{ cm} \cdot 8\text{ cm}) + (4\text{ cm} \cdot 1\text{ cm}) = 44\text{ cm}^2$$

Los perímetros se mantienen, en cambio el área de B decrece con respecto a A.

1934. En una biblioteca, todos los libros menos 3 son de matemáticas, todos los libros menos 3 son de física, todos los libros menos 3 son de filosofía y todos los libros menos 3 son de química, ¿cuántos libros hay en la biblioteca?

Resolución

Sea x la cantidad total de libros y designemos las variables:

M: libros de matemática
N: libros de filosofía
F: libros de física
Q: libros de química

Si todos los libros menos 3 son de matemáticas:

$$x - 3 = M$$

Todos los libros menos 3 son de física:

$$x - 3 = F$$

Todos los libros menos 3 son de filosofía:

$$x - 3 = N$$

Todos los libros menos 3 son de química:

$$x - 3 = Q$$

Igualamos cada ecuación, pues todas son iguales a x - 3, al total menos tres. Así nos queda:

$$M = F = N = Q$$

Si todos los libros menos tres son de matemáticas, los otros tres deben ser cada uno de física, filosofía y química, unos de cada uno, pero pasa lo mismo con física, si todos los libros menos tres son de física, esos otros tres deben ser cada uno de matemáticas, filosofía y química, lo mismo para filosofía y química.

Por tanto, hay 4 libros en la biblioteca.

1935. Una fábrica produce 500 unidades de un producto en 8 horas. ¿Cuántas unidades producirá en 12 horas al mismo ritmo?

Resolución

Producción de unidades en horas:

500 unidades en 8 horas

x unidades en 12 horas

Por regla de tres

$$\left.\begin{array}{lcl} 500\ \text{u} & \longrightarrow & 8\ \text{h} \\ x\ \text{u} & \longrightarrow & 12\ \text{h} \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{500\ \text{u}\cdot 12\ \text{h}}{8\ \text{h}} = 750\ \text{u}$$

$$\Longrightarrow x = 750\ \text{u}$$

En 12 horas, la fábrica producirá 750 unidades.

1936. Un camión puede transportar 600 kg de mercancías en un viaje de 150 km. ¿Cuántos kg de mercancías podrá transportar en un viaje de 250 km al mismo ritmo?

a) 900 kg **b)** 900 kg **c)** 1000 kg **d)** 1100 kg

Resolución

El camión que transporta mercancía en un viaje:
600 kg en 150 km
x kg en 250 km

$$\left.\begin{array}{lcl} 600\ \text{kg} & \longrightarrow & 150\ \text{km} \\ x\ \text{kg} & \longrightarrow & 250\ \text{km} \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{600\ \text{kg}\cdot 250\ \text{km}}{150\ \text{km}} = 1000\ \text{kg}$$

$$\Longrightarrow x = 1000\ \text{kg}$$

El camión transporta 1000 kg de mercancía.

1937. En una obra de construcción, 8 trabajadores construyen un muro en 15 días trabajando 6 horas al día, ¿cuántos días tardarían 12 trabajadores en construir el mismo muro trabajando 5 horas al día?

a) 730 **b)** 740 **c)** 750 **d)** 760

Resolución

Datos

$T_1 = 8$ Trabajadores
$T_2 = 12$ Trabajadores
$D_1 = 15$ Días
$D_2 = ?$ Días
$H_1 = 6\ \dfrac{\text{Horas}}{\text{Día}}$
$H_2 = 5\ \dfrac{\text{Horas}}{\text{Día}}$

Por la regla de tres compuesta se tendrá:

$$\left.\begin{array}{r} 8 \longrightarrow 15 \longrightarrow 6 \\ 12 \longrightarrow x \longrightarrow 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{8 \cdot 15 \cdot 6}{12 \cdot x \cdot 5} = 1$$

Pues se quiere construir el mismo muro, entonces:

$$8 \cdot 15 \cdot 6 = 12 \cdot x \cdot 5 \Longrightarrow x = \frac{8 \cdot 15 \cdot 6}{12 \cdot 5} = 12$$

Los 12 trabajadores construirán el mismo muro, trabajando 5 horas al día en 12 días.

1938. Una empresa textil produce 5000 camisetas deportivas en 10 días con 20 obreros trabajando 8 horas diarias. La empresa decide contratar a 2 obreros adicionales y aumentar la jornada laboral a 10 horas diarias, para cubrir un pedido de 15 000 camisetas, ¿podrán cumplir la meta?

a) no podrá alcanzar el pedido **b)** podrá alcanzar el pedido

Resolución

Las variables son:

Obreros	Días	Horas	Producción (u)
$20 \longrightarrow$	$10 \longrightarrow$	$8 \longrightarrow$	5000
$30 \longrightarrow$	$15 \longrightarrow$	$10 \longrightarrow$	x

Se observa las siguientes relaciones entre las variables:
- Horas está en proporción directa con la variable Producción.
- Días está en proporción directa con la variable Producción.
- Obreros está en proporción directa con la variable Producción.

Por tanto:

Despejando x :

$$\frac{5000 \text{ camisetas}}{x} = \frac{10 \text{ días}}{15 \text{ días}} \cdot \frac{8 \text{ horas}}{10 \text{ horas}} \cdot \frac{20 \text{ obreros}}{30 \text{ obreros}}$$

$$x = 14\,062{,}5 \text{ camisetas} \approx 14\,062 \text{ camisetas}$$

La empresa no podrá alcanzar la cantidad del pedido.

1939. Si el costo de las frutillas que adquirió una persona asciende a 15 bs, ¿cuánto dinero gasta una persona en frutillas, si solo consume el 65% de las frutillas?

a) 9,25 Bs **b)** 9,50 Bs **c)** 9,75 Bs **d)** 9 Bs

Resolución

Datos

El costo de frutillas es 15 Bs

Consume el 65% de las frutillas

Calculando el gasto G:

$$G = 15 \cdot 65\,\% = 15 \cdot \frac{65}{100} = 9{,}75 \quad \Rightarrow \quad G = 9{,}75 \text{ Bs}$$

Respuesta

La persona gasta 9,75 bolivianos en las frutillas que consume.

1940. Pedro invirtió 250 000 bolivianos a una tasa de interés anual del 6%. Después de un tiempo, ha generado un interés de 10 000 bolivianos. ¿Cuánto tiempo ha pasado?

Resolución

C_i: Capital inicial 250 000 Bs
i: Porcentaje de Interés 6 %
I: Interés ganado 10 000 Bs
T: Tiempo

Luego:

$$10\,000 = 250\,000 \cdot 0{,}06 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}66 \text{ años}$$

Calculando el tiempo que pasa:

$$t_p = 0{,}66 \text{ años} \cdot \frac{12 \text{ meses}}{1 \text{ año}} \approx 7{,}92 \text{ meses}$$

El tiempo que pasó aproximadamente es 8 meses.

1941. Una inversión de 20 000 Bs, se destina a un proyecto de energía renovable en Bolivia, si se espera que la inversión crezca a 30 000 Bs en 5 años, ¿cuál es la tasa de interés anual, compuesta anualmente?

Resolución

Datos

$A = 30\,000$ Dinero acumulado
$P = 20\,000$ Inversión inicial
$r = ?$ Tasa de interés
$n = 1$ Interés compuesto por año
$t = 5$ Tiempo de años

Despejamos la tasa de interés de:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$\Longrightarrow 30\,000 = 20\,000\left(1 + \frac{r}{1}\right)^{1 \cdot 5} = 20\,000(1 + r)^5$$

$$\Rightarrow \frac{30\,000}{20\,000} = (1+r)^5 \Rightarrow \frac{3}{2} = (1+r)^5 \Rightarrow \sqrt[5]{\frac{3}{2}} = 1+r$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[5]{\frac{3}{2}} - 1 = 0{,}08 \Rightarrow r = (0{,}08 \cdot 100)\% = 8\%$$

La tasa de interés anual es aproximadamente al 8%.

1942. En Bolivia se quiere crear un fondo para la protección del cóndor, se pretende acumular 12 000 Bs en 7 años con una tasa de interés anual del 6% compuesta semestralmente, ¿cuál es la inversión inicial necesaria?.

Resolución

Datos

$A = 12\,000$	Dinero acumulado
$P = ?$	Inversión inicial
$r = 0{,}06$	Tasa de interés
$n = 2$	Interés compuesto por año (semestral)
$t = 7$	Tiempo de años

Se debe despejar P en :

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \Rightarrow P = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{12\,000}{\left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^{2\cdot 7}} = \frac{12\,000}{(1+0{,}03)^{14}} = \frac{12\,000}{(1{,}03)^{14}} = 7933{,}41$$

Así, el fondo deberá comenzar con 7933,41 Bs.

1943. Una tela tiene 20 metros de longitud. En la segunda compra que se hizo se adquirió los $\frac{2}{3}$ del resto que había quedado después de la primera. Sabiendo que las dos compras son iguales, ¿cuántos metros se compraron la primera vez?

Resolución

Datos

$L_T = 20$ m: Longitud de la tela

Sea:

x: La longitud adquirida en la primera compra

$20 - x$: El resto después de la primera compra

$\frac{2}{3}(20 - x)$: Segunda compra

Del problema que las dos compras son iguales:

$$x = \frac{2}{3}(20 - x) \Rightarrow 3x = 2 \cdot 20 - 2x \Rightarrow 5x = 40$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ m}$$

La primera vez se compra 8 metros.

1944. Una comunidad boliviana redujo su consumo de agua de 500 000 litros a 375 000 litros al mes. ¿Cuál es el porcentaje de reducción?

Resolución

Datos

$C_i = 500\,000$ Consumo inicial
$C_f = 375\,000$ Consumo final
$P = ?$ Porcentaje de reducción

Recordar:

$$Reducción = Consumo\ inicial - Consumo\ final$$

Reemplazando:

$$Porcentaje\ de\ reducción = \left(\frac{Reducción}{Consumo\ inicial}\right) \cdot 100$$

$$Reducción = 500\,000 - 375\,000 = 125\,000$$

$$Porcentaje\ de\ reducción = \left(\frac{125\,000}{500\,000}\right) \cdot 100 = 0{,}25 \cdot 100 = 25$$

Respuesta
El porcentaje se reducirá en un 25%.

1945. La producción de una planta de procesamiento aumentó de 1200 unidades a 1500 en un mes, ¿cuál es porcentaje de aumento?

Resolución

Datos
Calculamos el aumento:

$$1500 - 1200 = 300$$

Respecto a 1200 que es la cantidad, 300 unidades representan:

$$\frac{300}{1200} = 0{,}25 = 25\%$$

El incremento de 300 unidades, representa un incremento del 25% respecto a la producción total anterior.

1946. Un médico prescribe un medicamento que debe ser administrado a razón de 10 mg por kg de peso corporal. Si un paciente pesa 70 kg, ¿cuántos mg del medicamento debe recibir?

Resolución

Datos

- 10 mg de medicamento por 1 kg de peso corporal
- x mg de medicamento por 70 kg de peso corporal

Del problema la proporción es:

$$\frac{10\,mg}{1\,kg}=\frac{x\,mg}{70\,kg}\ \Rightarrow\ x=\frac{10\,mg}{1\,kg}\cdot 70\,kg\ \Rightarrow\ x=700\,mg$$

Respuesta

El paciente debe recibir *700 mg* de medicamento .

1947. Los costos de producción de una fábrica de zapatos se redujeron de 50 000 bolivianos a 42 000 bolivianos, ¿cuál es el porcentaje de reducción en los costos?

a) 4% **b)** 8% **c)** 12% **d)** 16%

Resolución

Datos

Se calcula el monto de reducción:

$$50\,000-42\,000=8000$$

El costo de producción de la fábrica se redujo en 8000 bolivianos, este valor representado en porcentaje es:

$$\frac{8000}{50\,000}=0{,}16=16\%$$

El porcentaje correspondiente a la reducción de costos de la fábrica es del 16%.

1948. Se necesita preparar una solución salina al 5% usando 20 g de sal. ¿Cuántos ml de agua se necesitan?

Resolución

Datos

Sea:

x: cantidad de agua en ml

Solución salina al 5 % = 0,05 usando 20 g de sal es:

$$\frac{5\ g}{100} = \frac{20\ g}{x\ \text{ml}} \Rightarrow x\ \text{ml} = \frac{20\ g \cdot 100}{5\ g} = 400\ \text{ml}$$

$$\Rightarrow x = 400\ \text{ml}$$

Respuesta

Se necesitan 400 ml de agua.

1949. En una fábrica producen dos artículos diferentes que se venden a 3 Bs y 5 Bs cada uno. Si se venden 140 articulos de los dos tipos y los ingresos obtenidos son de 526 Bs. ¿Cuántos artículos se vendieron de los que eran más caros?

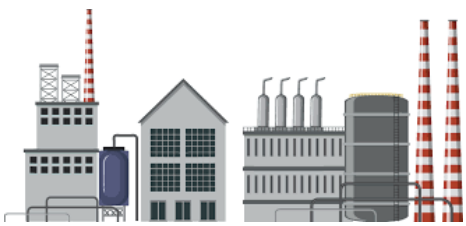
Resolución

Datos

Sea:

x: cantidad de artículos vendidos a 3 Bs cada uno

y: cantidad de artículos vendidos a 5 Bs cada uno



Según el problema, se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=140 \\ 3x+5y=526 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=140-y & (1) \\ 3x+5y=526 & (2) \end{cases}$$

La ecuación (1) en (2):

$$3(140-y)+5y=526 \Rightarrow 420-3y+5y=526$$
$$\Rightarrow 2y=106$$
$$\Rightarrow y=53$$

Se vendieron 53 artículos más caros

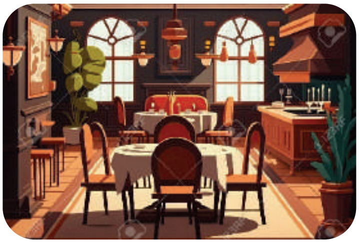
1950. En un restaurant se vende tres tipos de platos chicharrón, fricase, y escabeche. Entre todos se logra un ingreso de 62 000 Bs al día. Los platos de escabeche vendidos logran un ingreso igual a la cuarta parte de lo que se obtuvo con el chicharrón, la venta de los platos de fricase es una quinta parte más que del ingreso de los platos de escabeche. ¿Cuál fue el ingreso por la venta de platos de chicharrón?

Resolución

Datos

Sea:

x: ingreso por platos de chicharrón
y: ingreso por platos de fricase
z: ingreso por platos de escabeche



Se plantea en un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=62\,000 \\ z=\dfrac{x}{4} \\ y=\dfrac{z}{5}+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=62\,000 & (1) \\ x=4z & (2) \\ y=\dfrac{6z}{5} & (3) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, las ecuaciones (2) y (3) en (1):

$$4z + \frac{6z}{5} + z = 62\,000 \quad \Rightarrow \quad 31z = 5 \cdot 62\,000 = 310\,000$$

$$\Rightarrow \quad z = 10\,000 \text{ Bs}$$

En la ecuación (3):

$$y = \frac{6 \cdot 10\,000}{5} = 12\,000 \text{ Bs}$$

En la ecuación (2):

$$x = 4 \cdot 10\,000 = 40\,000 \text{ Bs}$$

El ingreso por la venta de platos de chicharon es $40\,000$ Bs

Ejercicios

1951. Cuál es la figura que continua en la secuencia dada por:

a) *b*) *c*) *d*) *e*)

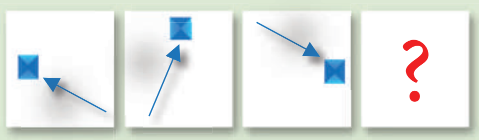
Respuesta: ......

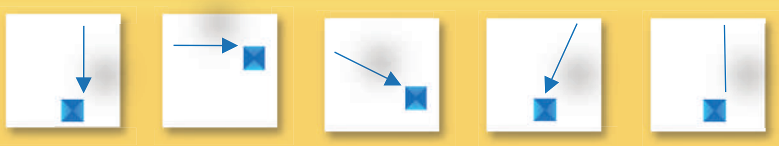
1952. ¿Qué figura completa la secuencia presentada por?

a) *b*) *c*) *d*) *e*)

Respuesta: .....

1953. ¿Qué elemento gráfico continúa la secuencia lógica ilustrada?





a) *b*) *c*) *d*) *e*)

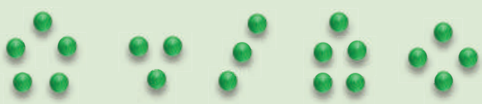
Respuesta: .....

1954. ¿Qué imagen completa la cadena de figuras mostradas?

a) *b*) *c*) *d*) *e*)

Respuesta: ......

1955. Buscar dos figuritas que se relacionen.



a) *b*) *c*) *d*) *e*)

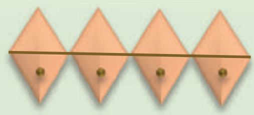
Respuesta: .....

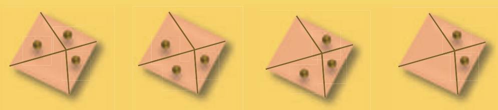
1956. Buscar la figura que sigue la serie.

a) *b*) *c*) *d*)

Respuesta: .....

1957. Hallar la figura especial que se forma al doblar la primera figura.

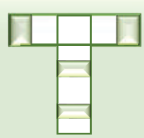


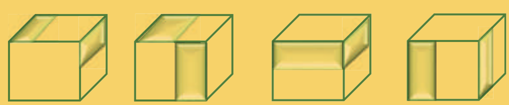


a) *b*) *c*) *d*)

Respuesta: .....

1958. Hallar la figura especial que se forma al doblar la primera figura.

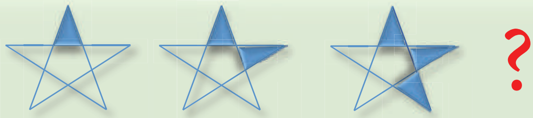


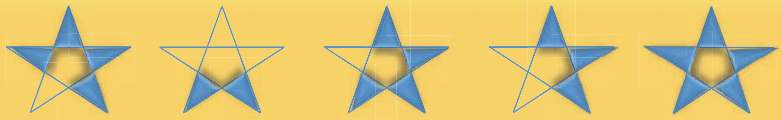


a) *b*) *c*) *d*)

Respuesta: ......

1959. Buscar la figura que sigue:

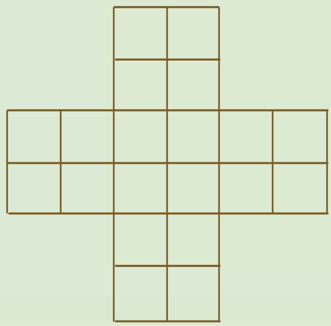




a) *b*) *c*) *d*) *e*)

Respuesta: .....

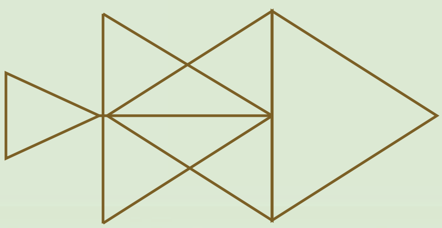
1960. Dada la figura, ¿cuántos cuadrados existen?



a) 13 *b*) 30 *c*) 21 *d*) 33

Respuesta: .....

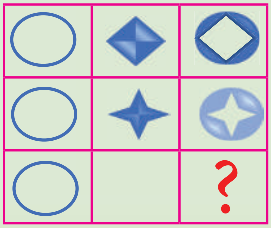
1961. Determinar la cantidad de triángulos que tiene la siguiente figura.

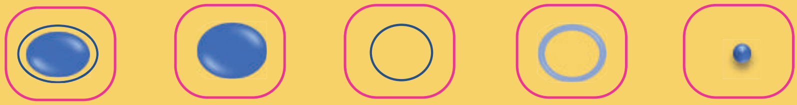


a) 14 *b*) 17 *c*) 11 *d*) 8

Respuesta: .....

1962. Encuentre el elemento de la casilla marcado con "?".

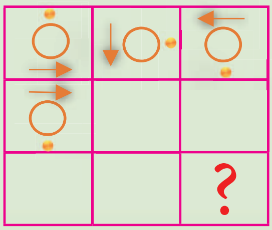


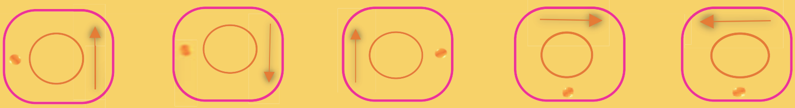


a) *b)* *c)* *d)* *e)*

Respuesta: .....

1963. Completar la matriz de figuras incompleta y mostrar la figura faltante.

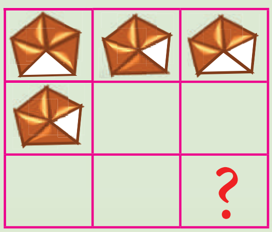


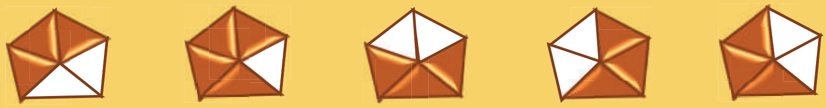


a) *b)* *c)* *d)* *e)*

Respuesta: .....

1964. Encuentre el elemento de la casilla marcado con "?".

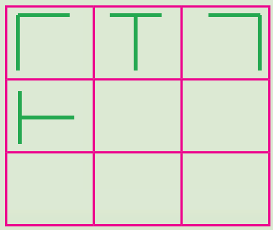


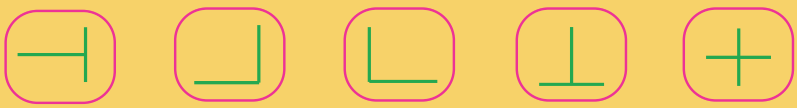


a) b) c) d) e)

Respuesta: .....

1965. Determine todas las figuras que faltan en la matriz y señalar la que corresponde al segundo elemento de la tercera fila.

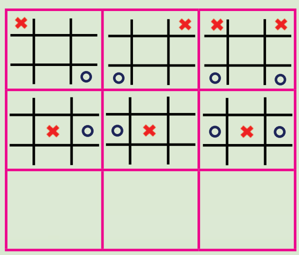


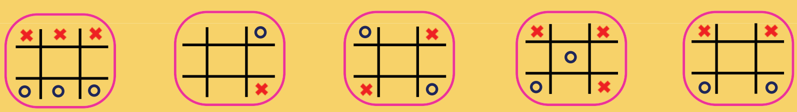


a) b) c) d) e)

Respuesta: .....

1966. Completar la última fila de la matriz de figuras. ¿qué figura va como su primera entrada?

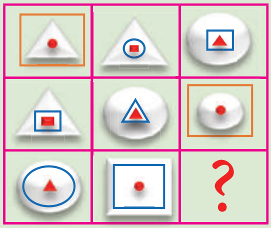


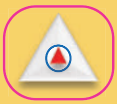


a) b) c) d) e)

Respuesta: .....

1967. Complete la matriz de figuras, hallando la figura faltante:

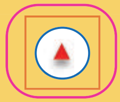



a)


b)

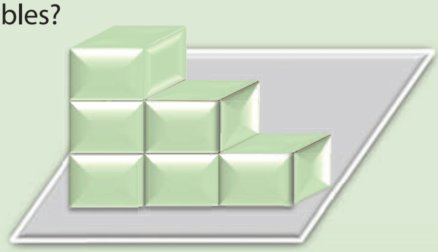

c)


d)


e)

Respuesta: .....

1968. Seis dados están apilados en el suelo como se muestra en la figura. En cada dado, la cara 1 es opuesta a la cara 6, la cara 2 es opuesta a la cara 5 y la cara 3 es opuesta a la cara 4, ¿cuál es el valor máximo que se puede obtener sumando los números de las 21 caras visibles?



a) 89 *b)* 90 *c)* 91 *d)* 85

Respuesta: .....

1969. La maestra dejó anotado en el pizarrón el siguiente ejercicio, esperando que los estudiantes lo resuelvan antes de salir al recreo:
"Hallar la suma de todos los dígitos del siguiente número:
$(777\,777\,777\,777\,777)^2 - (222\,222\,222\,222\,223)^2$"

a) 74 *b)* 75 *c)* 55 *d)* 84

Respuesta: .....

1970. Mateo le dijo a Juan lo siguiente: "A cada problema de matemática que resuelvas te regalaré 2 bolivianos y 30 centavos, pero por cada problema que no soluciones, me tienes que pagar 80 centavos". Juan se pone a trabajar durante una hora en 10 problemas, logrando obtener de Mateo 10 bolivianos y 60 centavos, ¿cuántos pudo resolver Juan?

a) 4 *b)* 5 *c)* 8 *d)* 6

Respuesta: .....

1971. Josué, Astrid, Nicolas y Estela son cuatro amigos. Josué dice que "Astrid tiene 8 caramelos más que Estela". Nicolas dice "Astrid tiene el triple de caramelos de los que tiene Estela". Si ambos dicen la verdad, ¿cuántos caramelos tiene Astrid?

a) 14 *b)* 12 *c)* 16 *d)* 10

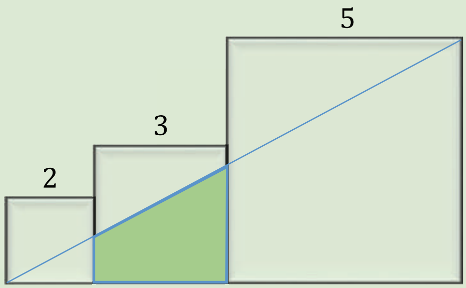
Respuesta: .....

1972. La figura muestra seis cuadrados dibujados y sombreados, ¿qué fracción del total de área es la parte sombreada?

a) $\frac{4}{6}$ *b)* $\frac{2}{3}$ *c)* $\frac{1}{3}$ *d)* $\frac{3}{2}$

Respuesta: .....

1973. En la figura se muestran e indican las dimensiones de tres cuadrados, ¿cuál es el área del cuadrilátero coloreado?



a) $\dfrac{24}{4}$ *b)* $\dfrac{21}{4}$ *c)* $\dfrac{24}{5}$ *d)* $\dfrac{21}{5}$

Respuesta: .....

1974. Los estudiantes de tres paralelos (A, B, C) de una unidad educativa, organizan un concurso. El total de estudiantes de los 3 paralelos es 89. En el paralelo A hay 2 participantes varones más que mujeres, en el paralelo B hay 2 participantes mujeres más que varones y en el paralelo C hay 7 participantes mujeres menos que varones, ¿cuál es el número total de mujeres que participan en el concurso?

a) 41 *b)* 31 *c)* 42 *d)* 32

Respuesta: .....

1975. Un grupo de tejedoras concluye de hilar una manta en 20 días, trabajando 6 horas diarias, ¿en cuántos días concluirán de hilar una manta, trabajando 8 horas diarias?

a) 14 *b)* 13 *c)* 15 *d)* 16

Respuesta: .....

1976. Lorenzo debe encontrar la cantidad de números de 3 dígitos, tales que la suma de los 3 dígitos que los componen den 25.

a) 3 *b*) 7 *c*) 4 *d*) 6

Respuesta: .....

1977. Vicenta contempla el calendario y observa que, en un mes, tres de sus domingos caen en fechas que son números pares, ¿cuál es el décimo día de tal mes?

a) sábado *b*) martes *c*) miércoles *d*) lunes

Respuesta: .....

1978. El amigo de Romina tiene una afición, para contar no utiliza los números naturales, sino los números pares 2,4,6,8,10,…., según el amigo de Romina, ¿cómo es el número 111?

a) 220 *b*) 221 *c*) 223 *d*) 222

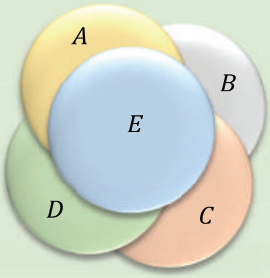
Respuesta: .....

1979. Un Ingeniero recibió una dotación de 96 uniformes para repartirlos por igual entre los obreros de la construcción sin que sobre alguno. El día de la repartición todos los obreros fueron a trabajar, excepto Pérez. El Ingeniero distribuyó los uniformes por igual a cada obrero pero sobraron 5 uniformes, ¿cuántos obreros hay en la construcción?

a) 6 *b*) 7 *c*) 9 *d*) 8

Respuesta: .....

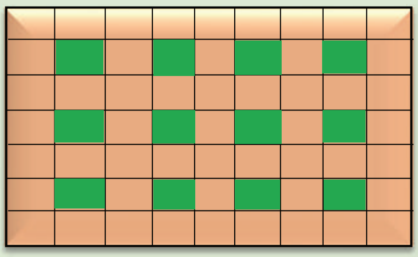
1980. Cinco portavasos circulares fueron colocados en una mesa como se muestra en la figura. Se pide encontrar el orden de colocación, empezando con el portavaso del fondo.



a) *A,C,B,A,D* *b)* *B,C,D,A,E* *c)* *E,B,C,D,A* *d)* *B,D,C,A,E*

Respuesta: .....

1981. El piso de un salón fue cubierto con mosaicos de dos colores, como en la figura:



Si cada mosaico de color verde, costó Bs 20 y cada mosaico de color ladrillo costó Bs 30, ¿cuál fue el costo por la compra de las mosaicos?

a) Bs 1500 *b)* Bs 1600 *c)* Bs 1770 *d)* Bs 1880

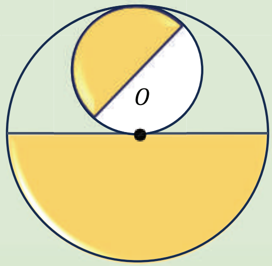
Respuesta: .....

1982. Para una lista de canciones, cuyos primeros caracteres de sus títulos aparecen números desde el 001 hasta el 999, para así ordenarlos, ¿cuántos dígitos 0 aparecen en total?

a) 298 *b)* 296 *c)* 295 *d)* 297

Respuesta: .....

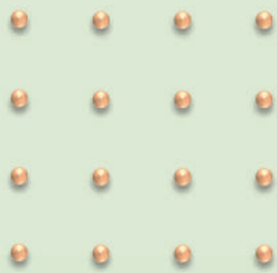
1983. Sabiendo que el área del círculo mayor es 64π y O es el punto medio del círculo mayor, determinar el área de la región coloreada.



a) 40π *b)* 30π *c)* 56π *d)* 50π

Respuesta: .....

1984. El pizarrón de la clase contenía para los estudiantes el siguiente reto matemático: Hallar el número de cuadrados que pueden obtenerse al unir los puntos del siguiente diagrama:



a) 25 *b)* 35 *c)* 20 *d)* 18

Respuesta: .....

1985. Una fábrica de cajas produce 10 000 cajas en 5 días utilizando 20 máquinas trabajando 8 horas al día, ¿cuántas cajas producirán en 8 días utilizando 25 máquinas trabajando 10 horas al día?

a) 24 000 cajas *b)* 26 000 cajas *c)* 25 000 cajas *d)* 22 000 cajas

Respuesta: .....

1986. La empresa textil de una localidad produce 40 000 prendas en 15 días utilizando 50 máquinas, las cuales están operativas durante 12 horas al día. ¿Cuántas prendas se pueden producir en 20 días utilizando 60 máquinas operando durante 10 horas al día?

a) 54 000 prendas *b*) 53 280 prendas *c*) 53 333 prendas *d*) 56 280 prendas

Respuesta: .....

1987. Una empresa de bebidas invierte 600 000 bolivianos en la expansión de su planta de producción, esperando un crecimiento anual del 6% en la producción, ¿cuál será el valor de la producción aproximado después de 8 años?

a) 956 308 Bs *b*) 856 320 Bs *c*) 966 310 Bs *d*) 956 310 Bs

Respuesta: .....

1988. Una fábrica de muebles produce 10 000 sillas al mes, resultando un 2% defectuosas después de un control de calidad y por tanto, deben ser devueltas, ¿cuántas sillas defectuosas se producen cada mes y cuántas sillas se producen sin defectos?

a) 9800 *sillas sin defectos y* 200 *sillas defectuosas*
b) 8900 *sillas sin defectos y* 300 *sillas defectuosas*
c) 10800 *sillas sin defectos y* 200 *sillas defectuosas*
d) 8800 *sillas sin defectos y* 200 *sillas defectuosas*

Respuesta: .....

1989. Una planta de embalaje invierte Bs 1 200 000 en tecnología avanzada para mejorar la eficiencia de su producción, esperando un aumento del 8% anual, ¿cuál será el valor aproximado de la producción mejorada después de 5 años?

a) 1 763 196 Bs *b*) 1 763 200 Bs *c*) 1 763 193 Bs *d*) 1673 900 Bs

Respuesta: .....

1990. Una empresa de agua trata 5000 litros de agua en 3 horas con 4 filtros. ¿Cuántos litros tratarán en 5 horas con 6 filtros?

a) 11 500 litros *b)* 12 000 litros *c)* 12 500 litros *d)* 13 000 litros

Respuesta: .....

1991. Un taller de artesanía en Sucre produce 300 piezas en 5 días con 4 artesanos, ¿cuántas piezas producirán en 8 días con 6 artesanos?

a) 420 piezas *b)* 520 piezas *c)* 620 piezas *d)* 720 piezas

Respuesta: .....

1992. Un grupo de artesanos bolivianos invierte 5000 Bs, en un fondo que crece a una tasa del 3% trimestral, ¿cuánto dinero tendrán después de 2 años?

a) 5203,5 Bs *b)* 5303,5 Bs *c)* 5403,5 Bs *d)* 5503,5 Bs

Respuesta: .....

1993. Un grupo de productores de alimentos quiere acumular 50 000 Bs en 4 años con una tasa de interés anual del 6% compuesta mensualmente. ¿Aproximadamente cuál es la inversión inicial necesaria?

a) 4435 Bs *b)* 4345 Bs *c)* 4453 Bs *d)* 4043 Bs

Respuesta: .....

1994. La producción de café orgánico en Bolivia aumentó de 2500 toneladas a 3750 toneladas, ¿cuál es el porcentaje de aumento?

a) 10% *b)* 20% *c)* 30% *d)* 50%

Respuesta: .....

1995. Tres hermanos en el tiempo que vivieron ahorraron 116 000 bolivianos. El menor ahorró una quinta parte del mayor, el hermano del medio ahorró una cuarta parte más que el menor. ¿Cuánto ahorró el hermano menor?

a) 20 000 *b)* 80 000 *c)* 50 000 *d)* 16 000

Respuesta: .....

1996. Un coleccionista compro dos automóviles en un total de 225 000 Bs, después de un tiempo decidió venderlos y al hacerlo obtuvo un beneficio del 40 %. ¿Cuánto pago por cada automóvil si uno de los autos dejó un beneficio del 25 % y el segundo del 50 %?

a) 8000; 20 000 *b)* 9000;13 500 *c)* 9000;12 000 *d)* 10 000;15 000

Respuesta: .....

1997. Un médico nutricionista hace la mezcla de dos productos. ¿Cuántos litros de crema con 25 % de grasa deberán añadirse a 80 litros de leche con 3 % de grasa para obtener una mezcla que contenga 5 % de grasa?

a) 8 L *b)* 5 L *c)* 2 L *d)* 10 L

Respuesta: .....

1998. Después que Carlos perdió 200 bolivianos, le queda el 80 % de dinero que tenía, ¿qué cantidad debe recibir Carlos para tener 1200 Bs?

a) 800 Bs *b*) 400 Bs *c*) 200 Bs *d*) 1000 Bs

Respuesta: .....

1999. Un médico realiza un experimento. Tiene 20 litros de una mezcla de agua y sal al 15 % de sal, para obtener una mezcla al 60 % de sal, ¿qué cantidad de agua debe evaporar?

a) 20 L *b*) 18 L *c*) 15 L *d*) 10 L

Respuesta: .....

2000. Sandra va al mercado, donde al comprar un cierto número de manzanas le regalan un 5 % de las que compró, obteniendo así 420 manzanas. ¿Cuántas manzanas compró?

a) 600 *b*) 350 *c*) 300 *d*) 400

Respuesta: .....

Clave de respuestas

Lógica y conjuntos

1201. b)	1216. c)	1231. a)	1246. b)
1202. b)	1217. b)	1232. c)	1247. c)
1203. a)	1218. c)	1233. b)	1248. a)
1204. c)	1219. d)	1234. c)	1249. d)
1205. c)	1220. d)	1235. b)	1250. a)
1206. d)	1221. a)	1236. a)	
1207. a)	1222. d)	1237. c)	
1208. d)	1223. b)	1238. b)	
1209. d)	1224. b)	1239. c)	
1210. a)	1225. b)	1240. d)	
1211. a)	1226. b)	1241. a)	
1212. b)	1227. c)	1242. d)	
1213. d)	1228. a)	1243. a)	
1214. c)	1229. d)	1244. c)	
1215. b)	1230. c)	1245. d)	

Estadística

1451. b)	1466. a)	1481. b)	1496. c)
1452. d)	1467. d)	1482. b)	1497. c)
1453. c)	1468. a)	1483. a)	1498. a)
1454. a)	1469. d)	1484. d)	1499. a)
1455. b)	1470. c)	1485. a)	1500. c)
1456. c)	1471. a)	1486. c)	
1457. c)	1472. d)	1487. b)	
1458. d)	1473. c)	1488. a)	
1459. d)	1474. d)	1489. c)	
1460. a)	1475. c)	1490. b)	
1461. b)	1476. a)	1491. b)	
1462. a)	1477. c)	1492. b)	
1463. c)	1478. b)	1493. c)	
1464. c)	1479. a)	1494. a)	
1465. d)	1480. a)	1495. b)	

Cálculo

1701. a)
1702. c)
1703. b)
1704. a)
1705. a)
1706. d)
1707. b)
1708. d)
1709. b)
1710. b)
1711. b)
1712. c)
1713. b)
1714. a)
1715. a)
1716. b)
1717. a)
1718. b)
1719. b)
1720. c)
1721. a)
1722. a)
1723. c)
1724. c)
1725. c)
1726. d)
1727. d)
1728. b)
1729. d)
1730. c)
1731. c)
1732. b)
1733. d)
1734. d)
1735. b)
1736. c)
1737. d)
1738. c)
1739. c)
1740. b)
1741. d)
1742. a)
1743. b)
1744. b)
1745. d)
1746. a)
1747. d)
1748. b)
1749. b)
1750. c)

Razonamiento lógico

1951. e)
1952. c)
1953. d)
1954. d)
1955. a) y d)
1956. c)
1957. d)
1958. c)
1959. c)
1960. b)
1961. a)
1962. b)
1963. e)
1964. c)
1965. d)
1966. b)
1967. a)
1968. c)
1969. b)
1970. d)
1971. b)
1972. c)
1973. b)
1974. a)
1975. c)
1976. d)
1977. d)
1978. d)
1979. a)
1980. b)
1981. c)
1982. a)
1983. c)
1984. d)
1985. c)
1986. c)
1987. a)
1988. a)
1989. c)
1990. c)
1991. d)
1992. a)
1993. a)
1994. d)
1995. d)
1996. b)
1997. a)
1998. b)
1999. c)
2000. d)

BIBLIOGRAFÍA

- Adolfo Povis V. *Razonamiento matemático*. Editorial Moshera. Segunda edición.
- Hernández, F. H. (1998). *Teoría de conjuntos*. Sociedad Matemática Mexicana.
- Instituto Boliviano de Metrología (*IBMETRO*), Ministerio de Desarrollo Productivo y Economía Plural.
- Kuby, J. (2005). *Estadística elemental*.
- Moya, R. (2007). *Estadística Descriptiva conceptos y aplicaciones*. Editorial San Marcos. Lima Perú.
- Pinzón, A. (1973). *Conjuntos y estructuras.*
- Rojo, A. O. *Algebra I*. Buenos Aires. Editorial. "El Ateneo"
- Stewart, J. (2015). *Cálculo de variables,* 8ª edición. Cengage Learning.
- Sistema Internacional de unidades de medidas (2019). *Reglas de uso*. Novena edición. Editado en español por el Sistema Internacional de Metrología.

¿Qué es la Metrología?

Ciencia de las mediciones y sus aplicaciones.

Legislación

En Bolivia el Sistema Internacional de Unidades (S.I.) fue declarado de uso obligatorio e irrestricto en 1978, mediante la Ley Nacional de Metrología.

Ley N° 15380
Ley Nacional de Metrología

1978

- Se crea el Servicio Metrológico Nacional (SERMETRO), para aplicar las políticas nacionales en materia de metrología.
- Se establece el uso obligatorio del Sistema Internacional de Unidades - (S.I.), en todo el territorio nacional.

Decreto Supremo
N° 24498

1997

- Se crea el Instituto Boliviano de Metrología (IBMETRO), para administrar el SERMETRO.
- Se establece el Organismo Boliviano de Acreditación (OBA).
- Faculta a IBMETRO a prestar servicios en los ámbitos de metrología industrial, legal y científica.

Decreto Supremo
Nº 28243

2005

- Se crea la Dirección Técnica de Acreditación (DTA) como parte de la estructura organizacional de IBMETRO.

Decreto Supremo
Nº 29727

2008

- Se dispone que el Ministerio de Desarrollo Productivo y Economía Plural tiene bajo su tuición o dependencia al IBMETRO, como entidad desconcentrada.

¿Qué define cada una de las unidades que conocemos?

IBMETRO

INSTITUTO BOLIVIANO DE METROLOGÍA

REGLAS DE USO

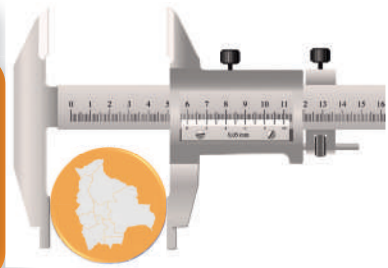
En la escritura de los símbolos del Sistema Internacional de Unidades (S.I.) se cometen una serie de errores fruto del desconocimiento de los mismos o simplemente por factores de castellanización.

Algunos de los errores más comunes se encuentran listados a continuación:

Nombre	Correcto	Incorrecto
metro	m	mts, mt, Mt, M
kilogramo	kg	kgr, kgrs, Kilo, KG, Kg
gramo	g	Gr, grs, Grs, g.
litro	l o L	Lts, lt, Lt
kelvin	K	Kv
centímetro cúbico	cm^3	cc, cmc, c.c.
kilómetro por hora	km/h	kph, kmph, kmh
kilómetro	km	Km, Kmt, kmt

Los símbolos de las unidades no son seguidos de puntuación, salvo cuando se trate del fin de la oración. Es incorrecto pluralizar con la letra “s” como se muestra en el segundo ejemplo.

Correcto	Incorrecto
50 m	50 m.
50 kg	50 kgs

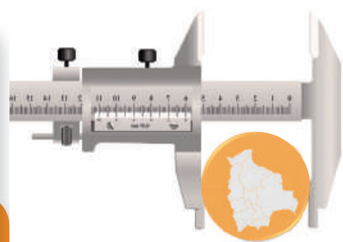


La sustitución de una mayúscula por una minúscula no se la debe realizar, pues puede alterar el significado.

Correcto	Incorrecto
5 km	5 Km Se lee 5 Kelvin metro
20 kg	20 Kg Se lee 20 Kelvin gramo

Los símbolos de las unidades son inalterables en el plural.

Correcto	Incorrecto
5 m	5 mts
2 s	2 segs
1 lux, 100 lux	100 luxes
1 hertz, 100 hertz	100 hertzes



Los valores numéricos serán expresados, cuando así correspondan, en decimales y nunca en fracciones.

Correcto	Incorrecto
1,75 m	1 3/3 m
0,5 °C	½ °C

Para la escritura de las fechas en forma numérica se debe respetar el siguiente orden: **AÑO MES DÍA**

Ejemplo	Correcto	Incorrecto
27 de septiembre de 2024	2024-09-27	27-09-2024
	2024 09 27	27/09/2024

Error

1. El símbolo de metro no es M. Debe ser: m
2. El símbolo de kilómetro no es KM. Debe ser km

Error

1. El símbolo de kilogramo (kg.) no termina en punto, salvo al final de la frase. Debe ser: kg
2. El símbolo de kilogramo no es Kg. Debe ser kg
3. Cuando se establece un intervalo entre medidas hay que indicar las unidades. No se escribe entre los 70 y los 95 kg. Debe escribirse: entre los 70 kg y los 95 kg

Error

1. El símbolo de kilogramo no es KG. Debe ser: kg
2. El símbolo de kilogramo no es kgs. Debe ser: kg
3. 7,5KG no es correcto. Debe ser: 7,5 kg

Los símbolos de las unidades deben escribirse en minúscula a excepción de los que derivan del nombre de un/ una científico/a.

Los símbolos de las unidades no deben ponerse en plural, ya que la letra "s" puede originar confusión, al representar al segundo. Al expresar un espacio entre el valor numérico de la magnitud y el símbolo de su unidad.

Error

1. No se escribe 9ºC. Debe ser: 9 ºC
2. El símbolo del grado Celsius no es º. Debe ser: ºC
3. La unidad de temperatura no es el grado centígrado. Es el grado Celsius desde 1948.

Error

Correcto	Incorrecto
$800\ \mathrm{W \cdot h/m^2}$	$800\ \mathrm{w/h/m^2}$

1. En la expresión de un cociente no debe usarse más de una línea inclinada.
2. No se puede dividir potencia (W), por tiempo (h), y por superficie (m^2). Genera un error en la expresión. Si es potencia por unidad de superficie, no puede estar dividida por una unidad de tiempo, h (W/m^2). Si fuera energía por unidad de superficie, la barra de dividir debería cambiarse por un punto de multiplicar centrado, ($W \cdot h/m^2$) o simplemente suprimirla y debería añadir el dato de cuánto tiempo tarda en generarla.
3. Error en la unidad reflejada (w), pues al proceder el vatio del apellido de James Watt, debería ponerse con mayúscula (W).

Error

Correcto	Incorrecto
80 g·m^{-2}	80 g.m^{-2}

1. La expresión reflejada g.m-^{2} contiene el error de colocar el punto de multiplicación bajo, cuando debería estar centrado verticalmente, de este modo g·m^{-2}
2. Otra forma correcta es g/m^{2}

Ejemplo

Las **llantas de 19’’ de serie** ofrecen acabados de metal mecanizado …

La vertiente tecnológica viene dada por **un cuadro de instrumentos digital con pantalla de 12,3’’ y un sistema de infoentretenimiento SYNC 3 con pantalla táctil de 8’’** y compatibilidad …

Bajo el capó, … esconde el bloque gasolina del … Estamos hablando del **motor 1.5 EcoBoost de 200 CV de potencia y un par máximo de 320 Nm**

Fuente: AUTOFÁCIL

1. La pulgada (’’) no es una unidad del S.I. y por lo tanto no es una unidad legal de medida. La magnitud debería expresarse en mm, al menos entre paréntesis, complementando así en unidades legales la información dada.
2. El caballo de vapor (**CV**) no es unidad del SI y, por lo tanto no es una unidad legal de medida. La potencia debería expresarse en kilovatios (**kW**). La unidad de par está mal escrita. El newton y el metro han de separarse por un espacio en blanco o un punto centrado: **N m; N · m**

Enzimas

Prueba	Resultado	Unidades	Valores de Normalidad
AST (GOT)	17	UI/I	(5 - 50)
ALT (GPT)	14	UI/I	(5 - 50)
Gamma - GT	15	UI/I	(Inf. 50)
Amilasa	91	UI/I	(80 - 118)

Fuente: LABORATORIO DE ANÁLISIS CLÍNICOS

Error

La unidad de actividad enzimática, **U** o **UI** no es unidad del SI y por lo tanto no es una unidad legal de medida. La unidad de medida del SI es el katal (**kat**). Los parámetros de ejemplo deberían darse en submúltiplos del katal: microkatal (**µkat**) y nanokatal (**nkat**).
La unidad de actividad enzimática (**UI**) es la cantidad de enzima que cataliza la transformación de 1 µmol de sustrato en un minuto. Se ha estado usando ampliamente en medicina y en bioquímica desde 1964 para expresar la actividad catalítica y desde 1999 la Conferencia General de Pesas y Medidas, sancionó como unidad de actividad enzimática el **katal** para evitar errores interpretativos provenientes de resultados de las medidas clínicas proporcionadas en diferentes unidades locales.

Ejemplo	Correcto	Incorrecto
¿Cómo deberia escribirse? 1200000	1 200 000	1.200.000

Los números con muchas cifras pueden agruparse de tres cifras separadas por un pequeño espacio.
Sin embargo cuando no hay más que cuatro cifras delante o detras del separador decimal, es usual no insertar un espacio.

Redondeo de cifras

Redondear significa sustituir la magnitud de un número dado por otro número denominado número redondeado, seleccionado de la secuencia de múltiplos enteros de un intervalo de redondeo seleccionado.

NB/ISO 80000-1:2022

Ejemplo: 1

Intervalo de redondeo: 0,1

Múltiplos enteros: 10,1; 10,2; 10,3; 10,4; etc.

Ejemplo: 2

Intervalo de redondeo: 10

Múltiplos enteros: 1010; 1020; 1030; 1040; etc.

Si sólo hay un múltiplo entero más cercano al número dado, éste se acepta como el número redondeado

NB/ISO 80000-1:2022

Ejemplo: 1

Intervalo de redondeo: 0,1

Número dado, número redondeado

10,223 → 10,2
10,251 → 10,3
10,275 → 10,3

Ejemplo: 2

Intervalo de redondeo: 10

Número dado, número redondeado

1022,3 → 1020
1025,1 → 1030
1027,5 → 1030

Si hay dos múltiplos enteros sucesivos igualmente cerca del número dado, **hay en uso dos reglas diferentes.**

Regla A

Se selecciona el múltiplo par como el número redondeado.

Ejemplo: 1

Intervalo de redondeo: 0,1

Número dado, número redondeado

10,25 → 10,2
10,35 → 10,4

Ejemplo: 2

Intervalo de redondeo: 10

Número dado, número redondeado

1025,0 → 1020
1035,0 → 1040

Regla B

Se selecciona el múltiplo de mayor magnitud como el número redondeado.

Ejemplo: 1

Intervalo de redondeo: 0,1

Número dado, número redondeado

10,25 → 10,3
10,35 → 10,4
-10,25 → -10,3
-10,35 → -10,4

Ejemplo: 2

Intervalo de redondeo: 10

Número dado, número redondeado

1025,0 → 1030
1035,0 → 1040
-1025,0 → -1030
-1035,0 → -1040

Las reglas dadas anteriormente deberían utilizarse sólo si no existen criterios especiales a tomar en cuenta para la selección del número redondeado. Por ejemplo, en los casos en que tienen que respetarse los requisitos de seguridad u otros límites, es aconsejable redondear sólo en una dirección.
El intervalo de redondeo debería indicarse siempre.

NB/ISO 80000-1:2022

Unidades básicas del S.I.

Nombre	Nombre	Símbolo
Tiempo	segundo	s
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Cuando se multiplican o dividen símbolos de magnitudes, puede emplearse cualquiera de las formas escritas siguientes:

Multiplicación:

$$ab,\ a\ b,\ a\cdot b,\ a \times b$$

División:

$$a/b,\ \frac{a}{b},\ a\ b^{-1}$$

Unidades derivadas del S.I. con nombres especiales

Magnitud Derivada	Nombre especial de la unidad	Símbolo y expresión en unidades básicas	Unidad expresada en S.I.
Ángulo plano	radián	rad = m/m	
Ángulo sólido	estereorradián	sr = m^2/ m^2	
Frecuencia	hercio	Hz = s^{-1}	
Fuerza	newton	N = kg m s^{-2}	
Presión, tensión	pascal	Pa = kg m^{-1} s^{-2}	N/m^2
Energía, trabajo, cantidad de calor	julio	J = kg m^2 s^{-2}	N m
Potencia, flujo radiante	vatio	W = kg m^2 s^{-3}	J/s
Carga eléctrica	culombio	C = A s	
Diferencia de potencial eléctrico	voltio	V = kg m^2 s^{-3} A^{-1}	W/A
Capacidad eléctrica	faradio	F = kg^{-1} m^{-2} s^4 A^2	C/V
Resistencia eléctrica	ohmio	Ω = kg m^{-2} s^{-3} A^2	V/A
Conductancia eléctrica	siemens	S = kg^{-1} m^{-2} s^3 A^2	A/V
Flujo magnético	weber	Wb = kg $m^2 s^{-2} A^{-1}$	V s
Densidad de flujo magnético	tesla	T = kg s^{-2} A^{-1}	Wb/m^2
Inductancia	henrio	H = kg m^2 s^{-2} A^{-2}	Wb/A
Temperatura Celsius	grado Celsius	°C = K	
Flujo luminoso	lumen	lm = cd sr	
Iluminancia	lux	lx = cd sr m^{-2}	lm/m^2

Actividad referida a un radionucleido	becquerel	$Bq = s^{-1}$	Wb/A
Dosis absorbida, kerma	gray	$Gy = m^2 s^{-2}$	J/kg
Dosis equivalente	sievert	$Sv = m^2 s^{-2}$	J/kg
Actividad catalítica	katal	$kat = mol\ s^{-1}$	

Prefijos de S.I.

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	µ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Conversión de unidades

Tiempo

1 h = 3600 s 1 min = 60 s
1 día = 24 h 1 año = 365 días

Masa

1 unidad de masa atómica (uma)
$= 1{,}6605 \times 10^{-27}$ kg
1 kg = 1000 g = 0,06852 slug
1 lb = 453,6 g

Fuerza

$1\ lb_f = 4{,}448$ N $1\ kg_f = 9{,}8$ N
$1\ N = 10^5\ dyn = 0{,}2248\ lb_f$ $1\ kg_f = 1$ kp

Energía y trabajo

$1\ J = 10^7$ ergs = 0,7376 ft · lb
1 ft · lb = 1,356 J = $1{,}29 \times 10^{-3}$ Btu
$= 3{,}24 \times 10^{-4}$ kcal
1 kcal = $4{,}19 \times 10^3$ J = 3,97 Btu
1 eV = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J
1 kWh = $3{,}600 \times 10^6$ J = 860 kcal

Potencia

1 W = 1 J/s = 0,7376 ft · lb/s = 3,41 Btu/h
1 hp = 550 ft · lb/s = 746 W

Presión

1 atm = 1,01325 bar = $1{,}01325 \times 10^5\ N/m^2$
$= 14{,}7\ lb/in.^2 = 760$ torr
$1\ lb/in.^2 = 6{,}895 \times 10^3\ N/m^2$
1 Pa $= 1\ N/m^2 = 1{,}450 \times 10^{-4}\ lb/in.^2$

Ángulo

π rad = 180°

Longitud

1 in = 2,54 cm
1 cm = 0,3937 in
1 ft = 30,48 cm
1 m = 39,37 in = 3,281 ft
1 mi = 5280 ft = 1,609 km
1 km = 0,6214 mi
1 milla náutica (E.U.A.) = 1,151 mi
1 fermi = 1 fentómetro (fm) = 10^{-15} m
1 angstrom (Å) = 10^{-10} m = 0,1 nm
1 año-luz (a. l.) (ly) = $9{,}461 \times 10^{15}$ m
1 parsec = 3,26 ly = $3{,}09 \times 10^{16}$ m

Volumen

1 litro (L) = 1000 mL = 1000 cm^3
$= 1{,}0 \times 10^{-3}\ m^3$ = 1,057 cuarto
(E.U.A) = 61,02 $in.^3$

1 gal (U.S.) = 4 cuarto (E.U.A)
$= 231\ in.^3$ = 3,785 = 0,8327 gal
(inglés)
1 pinta (inglesa) = 1,20 pintas
(E.U.A) = 568 mL
$1\ m^3 = 35{,}31\ ft^3$

BICENTENARIO DE
BOLIVIA

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

(591) 71550970 - 71530671

www.minedu.gob.bo

@minedubol

Ministerio de Educación - Oficial

@minedu_bol

MinEduBol

@minedubol

informacion@minedu.gob.bo

@minedu_bolivia

AV. ARCE NO. 2147 · TELÉFONOS: (591-2) 2442144 - 2442074
LA PAZ - BOLIVIA